Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients réels.

On rappelle qu'une matrice N est nilpotente si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$ (matrice nulle).

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'un couple (Δ, N) de matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est une *δ-décompostion* de A si

i. $A = \Delta + N$;

ii. N est nilpotente non nulle;

iii. $\Delta N = N\Delta$.

Question de cours : rappeler la formule du binôme de Newton dans $M_n(\mathbb{R})$ et les hypothèses de validité.

Partie I : étude d'un cas pour n = 2

On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (Δ, N) est une δ-décomposition de A_1.

2. Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le couple (Δ, N) est-il une δ-décomposition de A_2 ?

3. Calculer A_1^p pour $p \in \mathbb{N}$. Peut-on employer la même méthode si on voulait calculer A_2^p ?

Partie II : étude d'un cas pour n = 3

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Sans calculer Δ^{-1} démontrer que Δ est inversible.

5. Montrer que N est nilpotente.

6. Exprimer $N\Delta$ et ΔN en fonction de N. En déduire une δ-décomposition de A.

Dans les trois questions suivantes on veut trouver une δ-décomposition de A^{-1}. On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$.

7. Montrer, sans calculer Δ^{-1}, que $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}$. En déduire que N_1 est nilpotente (on détaillera soigneusement les calculs).

8. Développer $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1)$ et en déduire que $I_3 + N_1$ est inversible et donner son inverse.

9. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$. Donner, en fonction de Δ et N_1, une δ-décomposition de A^{-1}.

Dans les questions 10/ à 15/ on veut calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Soit d l'application linéaire canoniquement associée à Δ, i.e. l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

10. Trouver l'ensemble F des $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $d(X) = 2X$. Montrer que F est de dimension 2 et en préciser une base (f_1, f_2).

11. Trouver l'ensemble G des $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $d(X) = 4X$. Montrer que G est de dimension 1 et en préciser une base (g_1).

12. Montrer que $B' = (f_1, f_2, g_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de passage P de la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ à la base B' ? Calculer P^{-1} (on détaillera tous les calculs).

13. Trouver *très simplement* la matrice D de d dans la base B'.

14. Quelle relation lie les matrices Δ et D ? En déduire le calcul de Δ^p (donner une relation entre Δ^p, D^p et P).

15. En déduire, à l'aide de la question 6/, A^p en fonction de P, D et N.

Dans la suite on veut trouver une δ-décomposition d'une matrice R vérifiant $R^2 = A$ (R est appelée une racine carrée de A).

16. Trouver une matrice U telle que $U^2 = D$. En déduire une matrice S, que l'on exprimera en fonction de U et P, telle que $S^2 = \Delta$.

17. Calculer $\left(I_3 + \frac{1}{2}N_1\right)^2$ et en déduire une racine carrée de $I_3 + N_1$ (N_1 est définie en 7/).

18. En écrivant $A = \Delta.\left(I_3 + \Delta^{-1}N\right) = \Delta.\left(I_3 + N_1\right)$, et en admettant que S et N_1 commutent, trouver une racine carrée R de A (que l'on exprimera en fonction de S et de N_1).

19. Trouver une δ-décomposition de R.

Corrigé :

Partie I. 1.

On a immédiatement $\Delta + N = A_1, N^2 = 0$ et $\Delta N = N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc (Δ, N) est une δ-décomposition de A_1.

2. On a $\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\Delta N \neq N\Delta$ et (Δ, N) n'est pas une δ-décomposition de A_2.

3. Dans 1/, comme Δ et N commutent, on peut employer la formule du binôme de Newton : pour tout entier naturel p on a $A_1 = (\Delta + N)^p = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \Delta^{p-k}N^k = 3^p I_2 + p3^{p-1}N$ car $N^k = 0$ pour $k \geq 2$.

On ne peut pas employer cette méthode dans 2/ car Δ et N ne commutent pas.

Partie II.

4. En developpant par rapport à la première ligne on a $\det \Delta = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 8 = 16$. Comme $\det \Delta \neq 0$ alors Δ est inversible.

5. On a $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.

6. Un calcul facile donne $\Delta N = N\Delta = 2N$. Comme $A = \Delta + N$ et que N est nilpotente, alors (Δ, N) est une δ-décomposition de A.

7. On a $\Delta N = N\Delta \Longrightarrow N = \Delta^{-1}N\Delta$ (en multipliant à gauche par Δ^{-1}) $\Longrightarrow N\Delta^{-1} = \Delta^{-1}N$ (en multipliant à droite par Δ^{-1}).

On a $N_1^2 = \left(\Delta^{-1}N\right)^2 = \Delta^{-1}N\Delta^{-1}N = \Delta^{-1}\Delta^{-1}NN$ (car $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}$), donc $N_1^2 = \Delta^{-1}\Delta^{-1}N^2 = 0$. Donc N_1 est nilpotente.

8. Par distributivité de la multiplication sur l'addition on a $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1) = I_3 - N_1 + N_1 - N_1^2 = I_3$, car $N_1^2 = 0$. On en déduit que $I_3 + N_1$ est inversible à droite, donc à gauche aussi, et $\boxed{(I_3 + N_1)^{-1} = I_3 - N_1}$.

9. On a $A = \Delta + N = \Delta\left(I_3 + \Delta^{-1}N\right) = \Delta\left(I_3 + N_1\right)$ donc $\left[(I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}\right]A = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}\Delta\left(I_3 + N_1\right) = I_3$. Comme précedemment on en déduit que A est inversible d'inverse $\boxed{A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1} = (I_3 - N_1)\Delta^{-1}}$.

On a $A = \Delta^{-1} - N_1\Delta^{-1}$. De plus N_1 et Δ^{-1} commutent car : $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1} \Longrightarrow \Delta^{-1}\Delta^{-1}N = \Delta^{-1}N\Delta^{-1}$, et comme Δ^{-1} et N commutent on a $\Delta^{-1}\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}\Delta^{-1}$, soit $\Delta^{-1}N_1 = N_1\Delta^{-1}$. On a donc $\left(N_1\Delta^{-1}\right)^2 = N_1^2\left(\Delta^{-1}\right)^2 = 0$.

Enfin $\Delta^{-1}N_1 = N_1\Delta^{-1} \Longrightarrow \Delta^{-1}\left(\Delta^{-1}N_1\right) = \Delta^{-1}N_1\Delta^{-1} = \left(\Delta^{-1}N_1\right)\Delta^{-1}$ (car N_1 et Δ^{-1} commutent), donc Δ^{-1} et $\Delta^{-1}N_1$ commutent.

Conclusion : $\boxed{(\Delta^{-1}, -N_1\Delta^{-1}) \text{ est une } \delta\text{-décomposition de } A^{-1}}$.

10. En notant (x, y, z) les coordonnées de X on a : $d(X) = 2X \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x & = 2x \\ -x + 3y + z & = 2y \\ -x + y + 3z & = 2z \end{cases}$ ce qui équivaut à $-x + y + z = 0$. F est donc le plan vectoriel, ensemble des vecteurs $X(t + t', t, t') = t(1,1,0) + t'(1,0,1)$. Une base de F est donc $f_1 = (1,1,0)\,, f_2 = (1,0,1)$.

11. De même on a $d(X) = 4X \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x & = 4x \\ -x + 3y + z & = 4y \\ -x + y + 3z & = 4z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ -y + z & = 0 \end{cases}$. G est donc la droite vectorielle $\{(0, t, t)\,/ t \in \mathbb{R}\}$, de bas $g_1 = (0, 1, 1)$.

12. Pour montrer que $B' = (f_1, f_2, g_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer qu'il est libre car Card$(B') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. On a $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma g_1 = 0$ ssi $\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \\ \alpha + \gamma & = 0 \\ \beta + \gamma & = 0 \end{cases}$, ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc

La matrice de passage de B à B' est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Comme $d(f_1) = 2f_1, d(f_2) = 2f_2$ et $d(g_1) = 4g_1$ on a immédiatement $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$.

14. On a $D = P^{-1}\Delta P$, soit $\Delta = PDP^{-1}$. Une récurrence facile donne, pour tout entier naturel p, $\boxed{\Delta^p = PD^pP^{-1}}$, avec $D^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 4^p \end{pmatrix}$.

15. On a $A^p = (A + N)^p = A^p + pA^{p-1}N$, pour tout entier naturel p (comme à la question 3/).

D'après 14/ on a $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, A^p = PD^pP^{-1} + pPD^{p-1}P^{-1}N}$.

16. On a immédiatement $U^2 = D$ avec $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a alors $\left(PUP^{-1}\right)^2 = PU^2P^{-1} = PDP^{-1} = \Delta$, soit $S^2 = \Delta$ avec $\boxed{S = PUP^{-1}}$.

17. On a $\left(I_3 + \frac{1}{2}N_1\right)^2 = I_3 + N_1 + \frac{1}{4}N_1^2 = I_3 + N_1$ (car $N_1^2 = 0$), soit $\left(I_3 + \frac{1}{2}N_1\right)^2 = I_3 + N_1$.

Une racine carrée de $I_3 + N_1$ est donc $I_3 + \frac{1}{2}N_1$.

18. On a $\left[S.\left(I_3 + \frac{1}{2}N_1\right)\right]^2 = S^2.\left(I_3 + \frac{1}{2}N_1\right)^2$ (car S et N_1 commutent, donc S et $I_3 + \frac{1}{2}N_1$ aussi), soit $\left[S.\left(I_3 + \frac{1}{2}N_1\right)\right]^2 = \Delta.\left(I_3 + N_1\right) = A$. Donc $\boxed{R = S.\left(I_3 + \frac{1}{2}N_1\right) \text{ est une racine carrée de } A}$.

19. On a $R = S + \frac{1}{2}SN_1$. De plus, comme S et N_1 commutent, on a $\left(\frac{1}{2}SN_1\right)^2 = \frac{1}{4}S^2N_1^2 = 0$.

De plus $S\left(\frac{1}{2}SN_1\right) = \frac{1}{2}S^2N_1 = \frac{1}{2}SN_1S = \left(\frac{1}{2}SN_1\right)S$, donc S et $\frac{1}{2}SN_1$.

Par conséquent $\left(S, \frac{1}{2}SN_1\right)$ est une δ-décomposition de R.