Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur l'intervalle $[-1;1]$.

On définit l'application φ de E dans E par $\varphi(f,g) = f(-1)\times g(-1) + f(1)\times g(1) + \displaystyle\int_{-1}^{1} f"(t)\, g"(t)\, dt$ pour tout f et g de E.

1. Montrer que φ est un produit scalaire de E (on vérifiera soigneusement que φ est définie).

2. Que peut-on dire de $\varphi(f,g)$ si f est paire et g impaire ?

3. Soit la fonction $f_n : t \mapsto t^n$ Calculer $\|f_n\|$ (norme euclidienne de f_n associée à φ).

Soit Ψ l'application de E dans E qui à f associe la fonction $\Psi(f)$ définie par $\Psi(f)(t) = f(-t)$ pour tout t appartenant à $[-1;1]$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme orthogonal (autrement dit une isométrie) de E.

5. Calculer $\Psi\circ\Psi$. Que peut-on en déduire sur la nature de Ψ ? Préciser les éléments caractéristiques de Ψ.

6. Transformer en somme le produit $\sin(a)\sin(b)$.

On définit la fonction $h_n \in E$ par $h_n(t) = \sin(2n\pi t)$ pour $t\in[-1;1]$ et $n\in\mathbb{N}$.

7. Calculer $\varphi(h_p,h_q)$ pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. On distinguera deux cas suivant que p et q sont égaux ou non. Que peut-on dire de la famille $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$?

On identifie un polynôme à coefficients réels avec sa fonction associée. On peut alors considérer $\mathbb{R}[X]$ comme un sous-espace vectoriel de E.

8. Soit P le plan engendré par 1 et X (autrement dit par les fonctions $t\mapsto 1$ et $t\mapsto t$). Montrer que la base canonique $B=(1,X)$ de P est orthogonale. En déduire une base orthonormée de P.

Dans la question suivante on considère un espace vectoriel quelconque V muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle ; \rangle$. Soit Π un plan vectoriel de V muni d'une base orthonormée (e_1,e_2) et p la projection orthogonale de V sur Π.

9. Montrer que $\forall x\in V, p(x) = \langle x; e_1\rangle e_1 + \langle x; e_2\rangle e_2$.

10. Calculer le projeté orthogonal de la fonction élément de E, $q : t\mapsto \cos(\pi t)$ sur le plan engendré par 1 et X.

<u>*Correction*</u> :

1. On vérifie immédiatement que φ est symétrique et bilinéaire.

Pour $f\in E$ on a $\varphi(f,f) = (f(-1))^2 + (f(1))^2 + \displaystyle\int_{-1}^{1} (f"(t))^2\, dt \geq 0$ (positivité de l'intégrale) donc φ est positive.

De plus on a $\varphi(f,f)=0$ ssi $(f(-1))^2 = (f(1))^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1}(f"(t))^2\,dt = 0$. Comme la fonction $f"^2$ est positive et continue (car f est de classe C^2) on en déduit que $f"=0$ sur $[-1;1]$ ce qui équivaut à l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(t) = at+b$ pout tout t de $[-1;1]$. En écrivant que $f(-1)=f(1)=0$ on obtient $-a+b=a+b=0$ soit $a=b=0$ et finalement $f=0$ donc φ est définie.

Conclusion : φ est un produit scalaire de E.

2. Si f est paire g est impaire alors $f"$ est aussi paire et $g"$est impaire donc $f"\times g"$ est impaire donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} f"(t)\,g"(t)\,dt = 0$. De plus $f(-1)\times g(-1) + f(1)\times g(1) = 0$ donc $\boxed{\varphi(f,g)=0}$.

3. On a pour $n\geq 2$, $\|f_n\|^2 = \varphi(f_n,f_n) = (f_n(-1))^2 + (f_n(1))^2 + \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(f_n"(t)\right)^2 dt$

$= 2 + \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(n(n-1)t^{n-2}\right)^2 dt$ soit $\|f_n\|^2 = 2 + n^2(n-1)^2\left[\frac{t^{2n-3}}{2n-3}\right]_{-1}^{1} = 2 + \frac{2n^2(n-1)^2}{2n-3}$ soit

$\boxed{\|f_n\| = \sqrt{2+\frac{2n^2(n-1)^2}{2n-3}}}$. On trouve d'autre part $\|f_0\| = \|f_1\| = \sqrt{2}$. La formule précédent est donc valable pour tout entier naturel n.

4. Il est clair que Ψ est linéaire. D'autre part, pour tout $f \in E$, on a $\|\Psi(f)\|^2 = \varphi(\Psi(f), \Psi(f)) = (f(1))^2 + (f(-1))^2 + \int_{-1}^{1} (f''(-t))^2 \, dt$ (car $(f(-t))'' = f''(-t)$ pour tout t de $[-1;1]$). Le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale donne $\int_{-1}^{1} (f''(-t))^2 \, dt = \int_{-1}^{1} (f''(u))^2 \, dt$ et donc $\varphi(\Psi(f), \Psi(f)) = \varphi(f, f)$, soit $\|\Psi(f)\| = \|f\|$ pour tout f de E. $\underline{\Psi \text{ est donc une isométrie de } E}$.

5. On a immédiatement $\Psi \circ \Psi = Id_E$ donc Ψ est une symétrie. D'autre part, pout tout f de E, on a $\Psi(f) = f$ ssi $\forall t \in [-1,1], f(t) = f(-t)$ i.e. f est paire et $\Psi(f) = -f$ ssi $\forall t \in [-1,1], f(t) = -f(-t)$ i.e. f est impaire.

Ψ est donc la symétrie par rapport au sev des fonction paires et parallèlement au sev des fonctions impaires.

6. Avec les relation d'Euler on a $\sin(a)\sin(b) = \frac{\left(e^{ia}-e^{-ia}\right)}{2i}\frac{\left(e^{ib}-e^{-ib}\right)}{2i} = \frac{e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{-i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{-4} = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$ donc $\boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))}$.

7. On a $\varphi(h_p, h_q) = 16\pi^4 p^2 q^2 \int_{-1}^{1} \sin(2p\pi t)\sin(2q\pi t) \, dt$

$= 8\pi^4 p^2 q^2 \left(\int_{-1}^{1} \cos(2(p-q)\pi t) \, dt - \int_{-1}^{1} \cos(2(p+q)\pi t) \, dt\right)$. Si $p \neq q$ on obtient $\varphi(h_p, h_q) = 0$ et si $p = q$, $\varphi(h_p, h_q) = 16\pi^4 p^4$. La famille $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale.

8. La fonction $t \mapsto 1$ étant paire et $t \mapsto t$ impaire on a $\varphi(1, X) = 0$ d'après 2/, donc la famille $(1, X)$ est orthogonale. De plus on a $\|1\| = \|X\| = \sqrt{2}$ (3/) donc la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{X}{\sqrt{2}}\right)$ est une base orthonormée de P.

9. Pour $x \in V$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in V^\perp$ tel que $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + z$ (donc $p(x) = \alpha e_1 + \beta e_2$). On a $\langle x; e_1\rangle = \alpha \langle e_1; e_1\rangle + \beta \langle e_2; e_1\rangle$ (car $\langle z; e_1\rangle = 0$). Le système (e_1, e_2) étant orthonormé, $\langle e_1; e_1\rangle = 1$ et $\langle e_2; e_1\rangle = 0$ donc $\langle x; e_1\rangle = \alpha$; de même on a $\langle x; e_2\rangle = \beta$ et finalement $\boxed{p(x) = \langle x; e_1\rangle e_1 + \langle x; e_2\rangle e_2}$.

10. D'après 8/ et 9/ le projeté de q sur le plan Vect$(1, X)$ est $t \mapsto \varphi\left(q, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \varphi\left(q, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\frac{t}{\sqrt{2}}$. On trouve $\varphi\left(q, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$ et $\varphi\left(q, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 0$ (car q est paire et $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2}}$ impaire) d'où $p(q) = -1$.