Préambule

Soit l'équation $x^3 - x^2 + \mu = 0$ d'inconnue réelle x où μ désigne un paramètre réel non nul.

a. Déterminer les valeurs de μ pour lesquelles cette équation admet trois racines réelles distinctes deux à deux.

b. Déterminer les valeurs de μ pour lesquelles cette équation a une racine double. Calculer cette racine.

Dans la suite du problème on désigne par :

E un espace vectoriel réel euclidien orienté de dimension 3;

$B = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée directe de E;

$\overrightarrow{u}$ un vecteur de E de coordonnées (a, b, c) dans la base B avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

D la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$.

On notera $\langle ; \rangle$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme euclidienne associée et $\wedge$ le produit vectoriel.

Partie A

Pour tout réel λ non nul et tout élément $\overrightarrow{x}$ de E on note f_λ l'application de E dans E définie par :

$$f_\lambda(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + \lambda \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u}.$$

1. Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

2. Calculer $\|f_\lambda(\overrightarrow{x})\|^2$ en fonction de $\overrightarrow{x}$ et de λ.

En déduire que f_λ est une isométrie de E si et seulement si $\lambda = -2$.

3. Trouver la matrice de f_{-2} dans la base B.

4. Trouver l'ensemble des vecteurs invariants de E par f_{-2}. En déduire la nature de f_{-2} et ses éléments caractéristiques.

Partie B

Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est $G = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

5. Démontrer que g est une rotation vectorielle si et seulement si a, b et c sont solutions du système

$$\begin{cases} ab + bc + ac & = & 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & = & 1 \end{cases}.$$

En utilisant l'identité $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\left[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac)\right]$ montrer que ce système équivaut à :

$$\begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ ab + bc + ac & = & 0 \end{cases}.$$

En déduire que g est une rotation si et seulement si a, b et c sont solution de l'équation $x^3 - x^2 + p = 0$ où p désigne un réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. Préciser p et I.

6. Lorsque g est une rotation vectorielle de E, avec b et c réels non nuls et égaux, déterminer l'axe et une mesure de l'angle de celle-ci.

Partie C

Soit r l'application de E dans E définie par :

$$r(\overrightarrow{x}) = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u} + \cos\theta \left[(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}) \wedge \overrightarrow{u}\right] + \sin\theta (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}).$$

On admettra que r est une application linéaire.

7. Trouver la matrice de r dans une base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u})$.
En déduire que r est une rotation d'axe D et d'angle θ.
8. Soit Ψ le demi-tour d'axe D. Trouver la matrice de Ψ dans la base B de E.