$\boxed{\textbf{EVE2}}$ **Question préliminaire**

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie . On note $\langle ; \rangle$ son produit scalaire et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

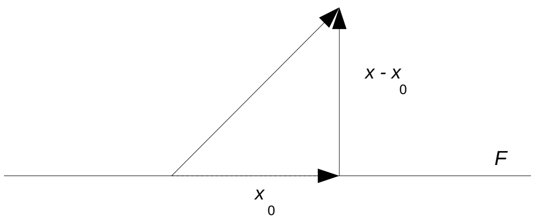
Soit p_F la projection orthogonale sur F. Soit $x \in E$.

1. Montrer que :

$$\forall y \in F, \|x-y\| \geq \|x-p_F(x)\|.$$

On a donc $d = \|x-p_F(x)\| = \min\limits_{y\in F} \|x-y\|$.

Ce réel d s'appelle *distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F.*



2. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de F et $x \in E$.

Montrer que $x_0 = p_F(x)$ si et seulement si $\langle x - x_0, e_k\rangle = 0$ pour $1 \leq k \leq p$.

Application 1

Dans les questions 3/ à 8/ E désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace de la matrice $A = (a_{i,j}) \in E$ définie par $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$. On rappelle que c'est une forme linéaire de E vérifiant : $\forall (A,B) \in E, \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Soit $\mathcal{T}$ l'application qui à M associe ${}^tM$, matrice transposée de M.

3. Montrer que $\mathcal{T}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{S}$ et parallèlement à $\mathcal{A}$, où $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont deux sous-espaces vectoriels de E à préciser.

On note φ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

4. Montrer que φ est une forme bilinéaire, symétrique.

5. Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de E. Calculer $\mathrm{tr}({}^tAB)$ en fonction de $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

En déduire que φ est un produit scalaire de E.

6. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ (définis en 1/) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux (i.e. $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ et $\mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{A}$).

Soit p la projection orthogonale sur $\mathcal{S}$ et parallèlement à $\mathcal{A}$.

7. Pour $A = (a_{i,j}) \in E$ calculer $p(A)$ en fonction de $a_{i,j}$.

8. Soit $A = (a_{i,j}) \in E$.

Déduire des questions précédentes la valeur de $\mu = \min\limits_{M\in\mathcal{S}} \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2\right)$ (avec $M = (m_{i,j})$) et trouver $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}$ telle que

$$\mu = \left(\sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j} - s_{i,j})^2\right).$$

Application 2

9. En utilisant la partie préliminaire calculer

$$m=\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(x-a\cos-b\sin x)^2\,dx\right]$$

Application 3 : droite de régression

Soient n réels $x_1,\ldots,x_n$ distincts deux à deux. On se place dans l'espace vectoriel E des fontions de $\{x_1,\ldots,x_n\}$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :

$$\forall (f,g)\in E^2,\ \langle f,g\rangle=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,g(x_k)\,.$$

La donnée d'un "nuage de points" $(x_k,y_k)_{1\leq k\leq n}$ revient à se donner l'élément f de E défini par :

$$f(x_k)=y_k \text{ pour } 1\leq k\leq n.$$

Les y_k étant donnés on cherche deux réels a et b qui minimise $\sum\limits_{k=1}^{n}(y_k-ax_k-b)^2$.

10. En faisant le lien avec les questions préliminaires, montrer que le couple (a,b) qui minimise $\sum\limits_{k=1}^{n}(y_k-ax_k-b)^2$ est unique.

Ecrire un système de deux équations dont la solution est le couple (a,b).

Corrigé :

Questions préliminaires

1. On écrit $x-y=(x-p_F(x))+(p_F(x)-y)$. D'après 1/ on a $x-p_F(x)\in F^{\perp}$ et $p_F(x)-y\in F$ (car $p_F(x)$ et y appartiennent à F) donc, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\|x-y\|^2=\|x-p_F(x)\|^2+\|p_F(x)-y\|^2\,,$$

donc $\|x-y\|^2\geq\|x-p_F(x)\|^2$ soit $\|x-y\|\geq\|x-p_F(x)\|$.

2. *Condition nécessaire* : si $x_0\in F$ et $x-x_0\in F^{\perp}$, on écrit : $x=x_0+(x-x_0)$. Comme $x_0\in F$ et $x-x_0\in F^{\perp}$ alors $x_0=p_F(x)$ par définition d'une projection.

Condition suffisante : si $x_0=p_F(x)$ alors on a $x=x_0+y$ avec $y\in F^{\perp}$. Comme $y=x-x_0$ alors $x-x_0\in F^{\perp}$.

Application 1

3. On sait que $\mathcal{T}$ est linéaire. D'autre part pour tout M de E on a $\mathcal{T}\circ\mathcal{T}(M)={}^{tt}M=M$ donc $\mathcal{T}\circ\mathcal{T}=Id_E$. On en déduit que $\mathcal{T}$ est une symétrie vectorielle.

D'autre part on a $\mathcal{T}(M)=M$ ssi ${}^tM=M$ i.e. $M\in\mathcal{S}$ sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{T}(M)=-M$ ssi ${}^tM=-M$ i.e. $M\in\mathcal{A}$ sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

Conclusion : $\mathcal{T}$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{S}$ et parallèlement à S.

Remarque : il en résulte que $E=\mathcal{S}\oplus\mathcal{A}$.

4. Montrons d'abord que φ est symétrique. Soit $(A,B)\in E^2$. On a $\varphi(A,B)=\operatorname{tr}({}^tAB)=\operatorname{tr}({}^t({}^tBA))$ (car ${}^t(MN)={}^tN{}^tM$) donc $\varphi(A,B)=\operatorname{tr}({}^tBA)$(car $\operatorname{tr}({}^tM)=\operatorname{tr}(M)$) donc $\varphi(A,B)=\varphi(B,A)$ et φ est symétrique.

Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(A,B,C)\in E^3$. On a $\varphi(\lambda A+\mu B,C)=\operatorname{tr}({}^t(\lambda A+\mu B)\,C)=\operatorname{tr}\left(\left(\lambda{}^tA+\mu{}^tB\right)C\right)=\operatorname{tr}\left(\lambda{}^tAC+\mu{}^tBC\right)=\operatorname{tr}\left(\lambda{}^tAC\right)+\operatorname{tr}(\mu{}^tBC)$, soit $\varphi(\lambda A+\mu B,C)=$

$\lambda \operatorname{tr}({}^tAC) + \mu \operatorname{tr}({}^tBC) = \lambda\varphi(A, C) + \mu\varphi(B, C)$. Ainsi φ est une forme linéaire par rapport à la première composante; comme de plus φ est symétrique alors elle est bilinéaire.

Conclusion : φ est une forme bilinéaire et symétrique.

5. Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ appartiennent à E alors ${}^tA = \left(a'_{i,j}\right)$ avec $a'_{i,j} = a_{j,i}$ et ${}^tAB = C = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a'_{i,k} b_{k,j}$ pour i et j compris entre 1 et n, soit $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,j}$. On a donc $\operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i}$ soit $\boxed{\operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i}}$.

Il en résulte que pour tout A appartenant à E on a $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geq 0$ donc la forme φ est positive. De plus on a $\varphi(A, A) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,k=1}^{n} a_{k,i}^2 = 0$ soit $a_{i,k} = 0$ pour tout i et k appartenant à $\{1, ..., n\}$ donc la forme φ est définie.

Conclusion : φ est un produit scalaire de E.

6. D'après 3/ on a $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$, et que si $M \in E$ on a la décompostion $M = \frac{M + {}^tM}{2} + \frac{M - {}^tM}{2}$, avec $M_1 = \frac{M + {}^tM}{2} \in S$ et $M_2 = \frac{M - {}^tM}{2} \in A$.

On a $M = M_1 + M_2 \in S^\perp$ ssi $\varphi(M, S) = 0$ pour toute matrice $S \in \mathcal{S}$. Cela équivaut à $\varphi(M_1, S) + \varphi(M_2, S) = 0$.

Or $\varphi(M_2, S) = tr({}^tM_2S) = tr(-M_2S)$ (car ${}^tM_2 = -M_2$)$= -tr(M_2S) = -tr(SM_2) = -tr({}^tSM_2)$(car S est symétrique), donc $\varphi(M_2, S) = -\varphi(S, M_2) = -\varphi(M_2, S)$, donc $\varphi(M_2, S) = 0$.

On a donc $M = M_1 + M_2 \in \mathcal{S}^\perp$ ssi $\varphi(M_1, S) = 0$ pour toute matrice symétrique S. Pour $S = M_1$ on obtient $\varphi(M_1, M_1) = 0$ soit $M_1 = 0$ Finalement $M = M_1 + M_2 \in \mathcal{S}^\perp$ ssi $M = M_2 \in \mathcal{A}$. On a donc $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{A}$.

Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont donc supplémentaires orthogonaux.

7. D'après 6/ on a, pour tout $M \in E$, $p(M) = \frac{M + {}^tM}{2}$. Si $A = (a_{i,j})$ on a donc :

$$\boxed{p(A) = \frac{M + {}^tM}{2} = \left(\frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2}\right)_{i,j}}.$$

8. On a $\mu = \min_{M \in \mathcal{S}} \|A - M\|^2 = \left(\min_{M \in \mathcal{S}} \|A - M\|\right)^2$ (où $\|\|$ est la norme euclidienne du produit scalaire φ).

D'après les questions précédentes le minimum $\min_{M \in \mathcal{S}} \|A - M\|$ est atteint pour $M = p(A) = \left(\frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2}\right)_{i,j}$ donc $\mu = \|A - p(A)\|^2 = \varphi(A - p(A), A - p(A))$. Comme soit $A - p(A) = \left(a_{i,j} - \frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2}\right) = \left(\frac{a_{i,j} - a_{j,i}}{2}\right)$ on a

$$\boxed{\mu = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{a_{i,j} - a_{j,i}}{2}\right)^2}.$$

Application 2

9. On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\, g(t)\, dt$.

On a alors $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x - a\cos - b\sin x)^2\, dx = \|id - a\cos - b\sin\|^2$.

D'après 1/ le minimum a lieu pour $a\cos + b\sin =$ projeté orthogonal de id sur le sev de F engendré par cos et sin.

D'après 2/ a et b sont caractérisés par le système : $\langle id - a\cos - b\sin, \cos\rangle = \langle id - a\cos - b\sin, \sin\rangle = 0$, soit $\langle id, \cos\rangle - a\langle\cos, \cos\rangle - b\langle\sin, \cos\rangle = \langle id, \sin\rangle - a\langle\cos, \sin\rangle - b\langle\sin, \sin\rangle = 0$.

On a $\langle id, \cos\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos x dx = 0$ et $\langle\sin, \cos\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\cos x dx = 0$ (l'intégrande étant impaire) et $\langle id, \sin\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin x dx = 2, \langle\sin, \sin\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\pi, \langle\cos, \cos\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\pi$.

On obtient le système : $\left\{\begin{array}{cc} a & = 0 \\ 2 - b\frac{\pi}{2} & = 0 \end{array}\right.$, soit $a = 0$ et $b = \frac{4}{\pi}$.

On a donc $m = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(x - \frac{4}{\pi}\sin x\right)^2 dx = \frac{\pi^4 - 96}{12\pi}$.

Application 3

10. Soit $f \in E$ défini par $f(x_k) = y_k$ $(1 \leq k \leq n)$ et F le sev de E des fonctions $x_k \longmapsto ax_k + b$ avec a et b réels. On a alors $m = \min\limits_{g\in F} \|f - g\|^2 = \left(\min\limits_{g\in F} \|f - g\|\right)^2$. D'après la question préliminaire on a $\min\limits_{g\in F} \|f - g\| = \|f - p(f)\|$ où p est la projection orthogonale de f sur F.

Soit $(e_1 : x_k \longmapsto 1, e_2 : x_k \longmapsto x_k)$ base de F et posons $p(f) = ae_2 + e_1$. $p(f)$ est caractérisée par $\langle f - p(f), e_k, \rangle = 0$ pour $1 \leq k \leq 2$, ce qui donne le système $\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)\, x_k = 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b) = 0$.