Partie 1.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n il existe un polynôme U_n à coefficients réels tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \sin\left[(n+1)\theta\right] = \sin(\theta) \times U_n(\cos\theta). \tag{1}$$

(On pourra utiliser la relation : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$ valable pour tout réels a et b).

Montrer que :

$$\forall n \geq 1, U_{n+1}(X) = 2XU_n(X) - U_{n-1}(X). \tag{2}$$

Calculer U_0, U_1, U_2 et U_3.

2. Montrer que pour tout entier naturel n il existe un unique polynôme U_n vérifiant (1).

3. En utilisant la relation (2) montrer que U_n est de degré n.

Calculer le coefficient du terme de plus haut degré de U_n.

4. Montrer que U_n possède n racines réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distinctes deux à deux dans l'intervalle $[-1, 1]$.

5. Pour $n \geq 1$ donner la décomposition de U_n en produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Partie 2.

On pose, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\sqrt{1-t^2}dt.$$

6. Montrer que l'application $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle$ de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.

(On montrera en particulier avec soin que cette application est définie).

7. Pour p et q entiers naturels distincts exprimer $\langle U_p, U_q\rangle$ sous forme d'une intégrale de la variable t.

En posant $t = \cos(x)$ avec $x \in [0, \pi]$ dans cette intégrale, montrer que $\langle U_p, U_q\rangle = 0$

(on pourra utiliser 2/ et la relation $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$, valable pour tous réels a et b).

Que peut-on dire du système $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

8. En s'inspirant de 6/ calculer $\|U_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

En déduire un système orthonormé de $\mathbb{R}[X]$.

Correction :

Partie 1.

1. Soit la propriété $P(n)$: "$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \ \sin(\theta) \times U_n(\cos\theta) = \sin\left[(n+1)\theta\right]$".

$P(0)$ et $P(1)$ sont vraies avec $\boxed{U_0 = 1}$ et $\boxed{U_1 = 2X}$ (car $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$).

Supposons $P(n)$ vraie pour tout entier k inférieur ou égal à n (entier fixé ≥ 1).

D'après la formule rappelée dans l'énoncé on a, pour tout réel θ :

$$\sin\left[(n+2)\theta\right] + \sin(n\theta) = 2\sin\left[(n+1)\theta\right]\cos(\theta),$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence : $\sin\left[(n+2)\theta\right] + \sin(\theta) \times U_{n-1}(\cos\theta) = 2U_n(\cos\theta)\sin(\theta)\cos(\theta)$.

On a donc : $\sin[(n+2)\theta] = \sin(\theta)[2U_n(\cos\theta)\cos(\theta) - U_{n-1}(\cos\theta)]$, soit $\sin[(n+2)\theta] = \sin(\theta)U_{n+1}(\cos\theta)$ avec $U_{n+1}(X) = 2XU_n(X) - U_{n-1}(X)$, qui est bien un polynôme à coefficients réels. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence (forte) on a $P(n)$ vraie pour tout entier naturel n.

De plus le raisonnement précédent montre que $\boxed{\forall n \geq 1, U_{n+1}(X) = 2XU_n(X) - U_{n-1}(X)}$.

2. Supposons qu'il existe un polynôme V_n vérifiant (1).

Alors, pour tout réel $\theta \not\equiv 0\,(\pi)$ on a $U_n(\cos\theta) = V_n(\cos\theta)$.

Les polynômes U_n et V_n coïncident en un infinité de points ils sont donc égaux.

Conclusion : il existe un unique polynôme U_n vérifiant (1).

3. Soit la propriété $P(n)$: "U_n est de degré n et son terme de plus haut degré est 2^n".
$P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
Supposons $P(n)$ vraie pour tout entier k inférieur ou égal à n (entier fixé ≥ 1).

On a $U_{n+1} = 2XU_n - U_{n-1}(X)$ et $d^\circ(U_n) = n$ (donc $d^\circ(2XU_n) = n+1$) et $d^\circ(U_{n-1}) = n-1$ donc $d^\circ(U_{n+1}) = n+1$.

Le coefficient du terme de plus haut degré de U_{n+1} s'obtient alore en multipliant par 2 celui de U_n donc il est égal à 2^{n+1}.

Conclusion : d'après le principe de récurrence (forte) on a $P(n)$ vraie pour tout entier naturel n.

4. On a $\sin[(n+1)\theta] = 0 \Longleftrightarrow (n+1)\theta \equiv 0\,(\pi) \Longleftrightarrow \theta = \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

On a donc : $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(\theta_k) \times U_n(\cos(\theta_k)) = 0$ d'après (1). Pour $k = 1, 2, \ldots, n$ on a $\theta_k \in]0, \pi[$ donc $\sin(\theta_k) \neq 0$, d'où $U_n(\cos(\theta_k)) = 0$.

Les réel $x_k = \cos(\theta_k)$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$ et sont distincts deux à deux (car la restriction de cos à $[0, \pi]$ est injective). Comme U_n est de degré n, U_n a au plus n racines; les réels $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ sont donc toutes les racines de U_n.

Conclusion : les réel $\boxed{x_k = \cos(\theta_k) = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}$ $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$ sont les racines de U_n (car $d^\circ U_n = n$).

5. D'après 4/ on a : $U_n(X) = \lambda(X - x_1)\ldots(X - x_n)$.

Le terme de plus haut degré de U_n est $2^n X^n$ (3/) et celui de $\lambda(X - x_1)\ldots(X - x_n)$ est λX^n, donc $\lambda = 2^n$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1, U_n(X) = 2^n(X - x_1)\ldots(X - x_n)}$.

Partie 2.

6. On voit facilement que la forme $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle$ est symétrique, bilinéaire, positive.

Vérifions qu'elle définie : si $\langle P, P\rangle = 0$ alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{1-t^2}dt = 0$. Comme l'application $t \longmapsto P(t)^2\sqrt{1-t^2}$ est continue que $[-1, 1]$ et positive alors on a $\forall t \in [-1, 1], P(t)^2\sqrt{1-t^2} = 0$, soit $P(t) = 0$ pour tout réel de $]-1, 1[$. Le polynôme P a une infinité de racine il est donc nul et donc la forme est bien définie.

Conclusion : $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$.

7. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ on a $\langle U_p, U_q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} U_p(t)\,U_q(t)\sqrt{1-t^2}dt$.

On pose dans cette intégrale $t = \cos x$ avec $x \in [0, \pi]$ donc $dt = -\sin x dx$, $\sqrt{1-t^2} = \sin x$ et on obtient : $\langle U_p, U_q\rangle = \displaystyle\int_0^\pi U_p(\cos x)\,U_q(\cos x)\sin^2 x dx = \int_0^\pi \sin[(p+1)x].\sin[(q+1)x]\,dx$, d'après la question 2/. Comme $2\sin[(p+1)x].\sin[(q+1)x] = \cos[(p-q)x] - \cos[(p+q+2)x]$, on obtient : $\langle U_p, U_q\rangle = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \cos[(p-q)x]\,dx - \int_0^\pi \cos[(p+q+2)x]\,dx$, soit $\langle U_p, U_q \rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(p-q)x]}{p-q} - \frac{\sin[(p+q+2)x]}{p+q+2}\right]_0^\pi = 0.$

Conclusion : $\boxed{\langle U_p, U_q \rangle = 0 \text{ pour } p \neq q}$.

La famille $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\|U_n\|^2 = \langle U_n, U_n \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} U_n(t)^2 \sqrt{1-t^2}dt$. Le changement de variable $t = \cos x$ donne comme précédemment : $\|U_n\|^2 = \displaystyle\int_0^\pi \sin^2[(n+1)x]\,dx$.

On linéarise : $\sin^2[(n+1)x] = \frac{1-\cos[2(n+1)x]}{2}$, d'où $\|U_n\|^2 = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos[2(n+1)x]}{2} xdx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin[2(n+1)x]}{2(n+1)}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{\|U_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

Le système $\left(\frac{U_k}{\|U_k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}U_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc un système orthonormé de $\mathbb{R}[X]$.