$\boxed{\textbf{EVE4}}$ On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ (n entier naturel ≥ 1) des polynômes de degrés inférieurs ou égal à n.

On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0),$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième du P.

Première Partie.

1. Montrer que φ est un produit scalaire de E.

On le notera $\langle , \rangle$ dans la suite du problème.

Soit v l'application qui au polynôme P associe le polynôme $Q(X) = P(1 - X)$.

2. Montrer que v définit un endomorphisme de E.

3. Calculer $v \circ v$. Que peut-on en déduire sur la nature de v ?

4. Montrer que $B' = \left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E.

Ecrire la matrice de v dans cette base.

Deuxième Partie.

Dans cette partie on prend $n = 2$.

5. Soit $B_c = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

Vérifier que B_c est une base orthogonale de E. En déduire une base orthonormée B_0 de E.

6. On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Pour $P = a + bX + cX^2$ et $Q = a' + b'X + c'X^2$ vérifier que :

$$\langle P, Q \rangle = (a, b, c)\, S \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

7. Soit u un endomorphisme de E et A sa matrice dans la base B_c. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall (P, Q) \in E \times E, \langle u(P), u(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$;

(ii) ${}^t ASA = S$.

Que peut-on dire de u si l'une des ces conditions est vérifiée ?

Soit v l'application définie dans la première partie.

8. Trouver la matrice A de v dans la base B_c.

Est-ce que v vérifie la propriété de la question 7/ ?

9. Donner la matrice B de v dans la base orthormée B_0 trouvée à la question 5/.

Retrouver le résultat de la question précédente.[ex24.2014]

Corrigé :

Première Partie.

1. Il est clair que φ est symétrique. Pour tous réels λ et μ et P_1, P_2, Q dans E on a $\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2, Q) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P_1 + \mu P_2)^{(k)}(0) Q^{(k)}(0) = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_1^{(k)}(0) Q^{(k)}(0) + \mu \sum_{k=0}^{n} P_2^{(k)}(0) Q^{(k)}(0)$, donc $\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2, Q) = \lambda\varphi(P_1, Q) + \mu\varphi(P_2, Q)$ donc φ est linéaire par rapport à la première composante. Comme φ est symétrique, φ est bilinéaire.

De plus : $\forall P \in E, \varphi(P, P) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left[P^{(k)}(0)\right]^2 \geq 0$ donc φ est positive. On a $\varphi(P, P) = 0$ ssi $\left[P^{(k)}(0)\right]^2 = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ soit $P^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. 0 est donc racine de P d'ordre au moins $n+1$, donc $\exists Q \in \mathbb{R}[X] / P = X^{n+1}Q$. Comme $d^\circ P \leq n$ on a $Q = 0$ donc $P = 0$. La forme φ est donc définie.

Conclusion : φ est un produit scalaire de E.

2. Il est clair que v est linéaire. De plus : $\forall P \in E; d^\circ P(1-X) = d^\circ P(X)$ donc $v(P) \in E$ et v est un endomorphisme de E.

3. Pour tout P de E on a $v \circ v(P) = v(P(1-X)) = P(1-(1-X)) = P(X)$ donc on a $\boxed{v \circ v = Id_E}$. Il en résulte que v est une symétrie de E.

4. B' est constituée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distinct, donc ce système est libre. Or il est de cardinal $n+1$ et $\dim E = n+1$ donc c'est une base de E.

Posons $P_k = \left(X - \frac{1}{2}\right)^k$ pour $0 \leq k \leq n$. On a $v(P_k) = \left(1 - X - \frac{1}{2}\right)^k = \left(-X + \frac{1}{2}\right)^k = (-1)^k P_k$. On a donc $Mat(v, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Deuxième Partie.

5. On vérifie que $\langle X^i, X^j \rangle = 0$ pour $i \neq j$ et $i, j \in \{0, 1, 2\}$ donc la base $B_c = (1, X, X^2)$ est orthogonale.

D'autre part on a $\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$ donc $\|1\| = 1$; $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$ donc $\|X\| = 1$; $\|X^2\|^2 = \langle X^2, X^2 \rangle = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 2 = 4$ donc $\|X^2\| = 2$.

Un base orthonormée de E est donc $\left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$.

6. On a $P' = b + 2cX, P'' = 2c$, $Q' = b' + 2c'X, Q'' = 2c'$, donc $\langle P, Q \rangle = aa' + bb' + 4cc'$.

On a $S \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 4c' \end{pmatrix}$ donc $(a, b, c) S \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = (a, b, c) \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 4c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + 4cc'$ donc $\langle P, Q \rangle = (a, b, c) S \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

7. Soient $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ les coordonnées de P et Q dans la base B_c. Les coordonnées de $u(P)$ et $u(Q)$ sont donc AC et AC'. On a donc $\langle u(P), u(Q) \rangle =^t (AC) S (AC')$ (d'après 6/) soit $\langle u(P), u(Q) \rangle =^t C^t ASAC'$.

On a donc : $\forall (P, Q) \in E \times E, \langle u(P), u(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$ ssi $\forall (C, C') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, {}^t C^t ASAC' = {}^t C^t SC'$.

Cette dernière relation équivaut à ${}^t ASA = S$ (pour le sens $\Longrightarrow$ on prend $C = e_i$ et $C' = e_j$ où e_1, e_2, e_3 sont les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^3$; on obtient que les coefficients (i, j) des matrices ${}^t ASA$ et S sont égaux donc ${}^t ASA = S$).

La relation **(i)** signifie que u conserve le produit scalaire, ce qui équivaut à dire que u est une isométrie de E.

8. On a $v(1) = 1, v(X) = 1 - X$ et $v(X^2) = (1-X)^2 = 1 - 2X + X^2$ donc la matrice A de v dans la base B_c est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc ${}^tASA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \neq S$ donc v ne vérifie pas la propriété du 7/.

9. Comme $B_0 = \left(1, X, \frac{X^2}{2}\right)$ les calculs précédents $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice n'est par orthogonale (par exemple les deux première colonnes ne sont pas orthogonales, ou la seconde n'est pas de norme 1) donc v n'est pas une isométrie donc on retrouve que v ne vérifie pas les rélsutats du 7/.