Endomorphismes symetriques

Questions préliminaires

Soit E un espace euclidien de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

On note $\langle , \rangle$ son produit scalaire.

1. Soit $x \in E$. Montrer que les coordonnées de x dans B sont : $x_k = \langle x, e_k \rangle$ $(1 \leq k \leq n)$.

2. Soit u un endomorphisme de E et $M = Mat(u, B, B) = (a_{i,j})$ sa matrice dans la base B.

Montrer que : $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle$.

On étudie dans la suite les endomorphismes u de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle. \tag{1}$$

On dit que u est un *endomorphismes symétrique* de u.

Première partie : propriétés générales des endomorphismes symétriques

3. Montrer que la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormée est une matrice symétrique.

4. Réciproquement montrer que si la matrice d'un endomorphisme u dans un base orthonormée est une matrice symétrique, alors u est un endomorphisme symétrique.

5. Soit u un endomorphisme symétrique qui est aussi une isométrie.

Que dire de sa matrice M dans une base orthonormée ? En déduire que u est une symétrie orthogonale.

Soit u une application de E dans E vérifiant (1) (on ne suppose pas que u est linéaire).

6. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in E, \langle u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y), z \rangle = 0.$$

7. En déduire que u est un endomorphisme symétrique.

Deuxième partie : étude d'exemples

8. Montrer qu'une projection orthogonale de E est un endomorphisme symétrique de E.

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 on note dans la suite $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $B = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.

On considère Φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P) = 3XP'(X) + \left(X^2 - 1\right) P''(X).$$

9. Montrer que Φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (que l'on continuera à noter Φ).

Pour P et Q dans E on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \sqrt{1 - t^2} dt.$$

10. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire de E (on s'attachera particulièrement à montrer que l'application est définie).

Le but des questions suivantes est de prouver que l'application Φ est symétrique.

11. Montrer que pour tout entier naturel q il existe un unique polynôme $P_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\theta \in]0, \pi[, \sin[(q+1)\theta] = \sin(\theta) P_q(\cos\theta) \quad \textbf{(**)}$$

(On calculera la polynôme P_q en utilisant les nombres complexes).

12. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est un système orthogonal de E.

(Pour i et j entiers naturels distincts on pourra poser $t = \cos\theta$ dans l'intégrale définissant $\langle P_i, P_j\rangle$ et utiliser la relation : $\sin p . \sin q = \frac{1}{2}[\cos(p-q) - \cos(p+q)]$).

En déduire qu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $(\lambda_0 P_0, \lambda_1 P_1, \ldots, \lambda_n P_n)$ soit un système orthonormé de E.

13. En dérivant deux fois la relation (**) montrer que pour tout entier naturel q :

$$\left(q^2 + 2q\right) P_q = 3XP_q' + \left(X^2 - 1\right) P_q''.$$

14. Déduire des questions précédentes que l'application Φ est symétrique.

(On pourra considérer la matrice de Φ dans la base $(\lambda_0 P_0, \lambda_1 P_1, \ldots, \lambda_n P_n)$).

<u>*Correction*</u> : **1.** Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$: $\langle x, e_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, e_k\rangle = x_k$ (car $\langle e_i, e_k\rangle = 0$ si $i \neq k$ et 1 si $i = k$).

2. Par définition de la matrice d'une application linéaire on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$. D'après la question précédente on a $\boxed{a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle}$.

3. Si $M = (a_{i,j})$ est la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ on a : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, a_{i,j} = \langle u(e_j), e_i\rangle$ (d'après 2/) $= \langle e_j, u(e_i)\rangle$ (car u est symétrique) $= \langle u(e_i), e_j\rangle = a_{j,i}$, donc la matrice M est symétrique.

4. Supposons que la matrice $M = (a_{i,j})$ d'un endomorphisme u dans une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ soit symétrique. Alors $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout i et j dans $\{1, \ldots, n\}$, soit $\langle u(e_j), e_i\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle$ **(*)** d'après 2/.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ appartiennent à E on a : $\langle u(x), y\rangle = \left\langle u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle$, soit $\langle u(x), y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle u(e_i), e_j\rangle$.

De même on a : $\langle x, u(y)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, u(e_j)\rangle$, donc $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ (d'après **(*)**).

Conclusion : u est un est un endomorphisme symétrique.

5. u étant un endomorphisme symétrique sa matrice M est symétrique i.e $M = {}^t M$. Comme u est un isométrie M est une matrice orthogonale donc ${}^t M = M^{-1}$, d'où $M = M^{-1}$ ou $M^2 = I_n$ (matrice identité). On a donc $u^2 = Id_E$ i.e. u est une symétrie. Comme c'est une isométrie, u est une symétrie orthogonale.

6. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in E$, on a : $\langle u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y), z\rangle = \langle u(\lambda x + y), z\rangle - \lambda \langle u(x), z\rangle - \langle u(y), z\rangle$, par linéarité du produit scalaire, soit

$$\begin{aligned}
\langle u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y), z\rangle &= \langle \lambda x + y, u(z)\rangle - \lambda \langle x, u(z)\rangle - \langle y, u(z)\rangle \text{ (car } u \text{ vérifie(1))} \\
&= \langle \lambda x + y - \lambda x - y, u(z)\rangle \text{ (linéarité du produit scalaire)} \\
&= \langle 0_E, z\rangle = 0.
\end{aligned}$$

7. D'après 6/ on a $u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y) = 0_E$ (car z est un vecteur quelconque : prendre par exemple $z = u(\lambda x + y) - \lambda u(x) - u(y)$), donc $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ donc u est linéaire. Comme elle vérifie (1) u est donc un endomorphisme symétrique.

8. Soit p la projection orthogonale sur F parallèment à $G = F^{\perp}$. Si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$et $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in F$ et $y_2 \in F^{\perp}$, on a : $\langle p(x), y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_1, y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$ (car $\langle x_1, y_2\rangle = 0$). De même $\langle x, p(y)\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$ (car $\langle x_2, y_1\rangle = 0$). On a donc $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$ pour tous vecteurs x et y de E donc p est un endomorphisme symétrique de E.

10. Il est facile de voir que $\langle , \rangle$ est symétrique, bilinéaire et positif.

Supposons que pour $P \in E, \langle P, P\rangle = 0$ soit $\int_{-1}^{1} (P(t))^2 \sqrt{1-t^2}dt = 0$. La fonction $t \longmapsto (P(t))^2 \sqrt{1-t^2}$ étant *continue* et *positive* sur $[-1, 1]$ on en déduit que $\forall t \in [-1, 1], (P(t))^2 \sqrt{1-t^2} = 0$ donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in]-1, 1[$. Le polynôme P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul, donc $\langle , \rangle$ est définie et c'est donc un produit scalaire de E.

11. Pour $\theta \in]0, \pi[$ et $q \in \mathbb{N}$ on a : $\sin[(q+1)\theta] = \text{Im}\left[e^{i(q+1)\theta}\right] = \text{Im}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{q+1}\right]$.

Or $(\cos\theta + i\sin\theta)^{q+1} = \sum\limits_{k=0}^{q+1} \binom{q+1}{k} \cos^{q+1-k}\theta . i^k \sin^k\theta$. Sa partie imaginaire s'obtient pour k impair. On pose donc $k = 2j+1$ et $0 \le 2j+1 \le q+1$, soit $0 \le j \le q/2$, donc $0 \le j \le E(q/2)$. On a donc $\text{Im}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{q+1}\right] = \text{Im}\left[\sum\limits_{j=0}^{E(q/2)} \binom{q+1}{2j+1} \cos^{q-2j}\theta . i^{2j+1} \sin^{2j+1}\theta\right] = \text{Im}\left[\sum\limits_{j=0}^{E(q/2)} \binom{q+1}{2j+1} \cos^{q-2j}\theta . i(-1)^j \sin^{2j+1}\theta\right]$.

Donc $\text{Im}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{q+1}\right] = \sin\theta \sum\limits_{j=0}^{E(q/2)} \binom{q+1}{2j+1} \cos^{q-2j}\theta . (-1)^j (1-\cos^2\theta)^j \theta$.

Finalement : $\sin[(q+1)\theta] = \sin(\theta) P_q(\cos\theta)$ avec $P_q(X) = \sum\limits_{j=0}^{E(q/2)} \binom{q+1}{2j+1} X^{q-2j} (-1)^j (1-X^2)^j$,

ou $\boxed{P_q(X) = \sum\limits_{j=0}^{E(q/2)} \binom{q+1}{2j+1} X^{q-2j} (X^2-1)^j}$.

Unicité de P_q : si Q_q est un autre polynôme vérifiant (**), on a : $\theta \in]0, \pi[, \sin(\theta) P_q(\cos\theta) = \sin(\theta) Q_q(\cos\theta)$, donc $P_q(x) = Q_q(x)$ pour tout réel de l'intervalle $]-1, 1[$. Les polynômes P_q et Q_q coïncident en un infinité de points, donc ils sont égaux : $P_q = Q_q$, d'où l'unicité de P_q.

12. Pour i et j entiers naturels distincts on a : $\langle P_i, P_j\rangle = \int_{-1}^{1} P_i(t) P_j(t) \sqrt{1-t^2}dt$. Posons $t = \cos\theta$ ($\theta \in [0, \pi]$) donc $dt = -\sin\theta . d\theta$ et $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta$ (car $\theta \in [0, \pi]$).

On obtient : $\langle P_i, P_j\rangle = \int_0^{\pi} P_i(\cos\theta) P_j(\cos\theta) . \sin^2\theta d t = \int_0^{\pi} \sin[(i+1)\theta] . \sin[(j+1)\theta] dt$ (d'après (**)). Comme $\sin[(i+1)\theta] . \sin[(j+1)\theta] = \frac{1}{2}[\cos((i-j)\theta) - \cos((i+j)\theta)]$, on a $2\langle P_i, P_j\rangle = \int_0^{\pi} \cos((i-j)\theta) d\theta - \int_0^{\pi} \cos((i+j)\theta) d\theta = \left[\frac{\sin((i-j)\theta)}{i-j}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin((i+j)\theta)}{i+j}\right]_0^{\pi} = 0$.

Le système $(P_k)_{0\le k\le n}$ est donc orthogonal.

Si $\lambda_i = \frac{1}{\|P_i\|}$ pour $0 \le i \le n$, alors $(\lambda_0 P_0, \lambda_1 P_1, \ldots, \lambda_n P_n)$ est un système orthonormé de E.

13. En dérivant (**) on obtient $\forall\theta \in]0, \pi[$: $(q+1)\cos[(q+1)\theta] = \cos\theta P_q(\cos\theta) - \sin^2\theta P_q'(\cos\theta)$, et en redérivant : $-(q+1)^2 \sin[(q+1)\theta] = -\sin\theta P_q(\cos\theta) - 3\cos\theta\sin\theta P_q'(\cos\theta) + \sin^3\theta P_q''(\cos\theta)$.

Donc : $-(q+1)^2 \sin(\theta) P_q(\cos\theta) = -\sin\theta P_q(\cos\theta) - 3\cos\theta\sin\theta P_q'(\cos\theta) + \sin^3\theta P_q''(\cos\theta)$ d'après (**) soit $(q^2+2q) P_q(\cos\theta) = 3\cos\theta P_q'(\cos\theta) - (1-\cos^2\theta) P_q''(\cos\theta)$ (en simplifiant par $\sin\theta$).

Les polynômes $(q^2+2q) P_q$ et $3X P_q'(X) + (X^2-1) P_q''$ coïncident en une infinité de points (tous les réels de l'intervalle $]-1, 1[$ donc ils sont égaux, soit $\boxed{(q^2+2q) P_q = 3X P_q' + (X^2-1) P_q''}$.

14. D'après 13/ on a : $\forall q \in \{0, \ldots, n\}, \Phi(P_q) = (q^2+2q) P_q$, donc $\Phi(\lambda_q P_q) = (q^2+2q) \lambda_q P_q$.

Dans la base orthonormée $(\lambda_0 P_0, \lambda_1 P_1, \ldots, \lambda_n P_n)$, la matrice de Φ est diagonale, donc elle est symétrique : d'après la question 4/, u est un endomorphisme symétrique de E.