

EVE6 ENDOMORPHISMES ANTISYMETRIQUES

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle, \rangle$.
Etant donnée une application f de E dans E on considère la propriété

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle \quad (*).$$

Noter qu'on ne suppose pas f linéaire.

PARTIE A. PROPRIETES GENERALE DES FONCTIONS VERIFIANT (*)

1. On suppose que f vérifie (*). Montrer que pour tout x dans E on a $\langle f(x), x \rangle = 0$.

Réciproquement soit u une application linéaire de E dans E telle que

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0.$$

Montrer que u vérifie la propriétés (*) (on pourra développer $\langle u(x+y), x+y \rangle$ pour x et y dans E).

2. Soit f vérifiant (*). Montrer que f est linéaire.

(Indication : on pourra développer $\langle f(x+\lambda y), z \rangle$ pour x, y et z dans E et λ réel).

3. Dans cette question seulement on suppose que f est une isométrie de E .

Montrer que f vérifie (*) si et seulement si $f \circ f = -Id_E$.

(Pour la condition nécessaire ($\implies$) on pourra considérer $\langle f^2(x), y \rangle$ pour x et y dans E).

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $M = (a_{ij})$ la matrice d'un endomorphisme u de E dans la base B .

4. Montrer que pour tout i et j de $\{1, \dots, n\}$ on a $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.

5. En déduire que l'endomorphisme u vérifie la propriétés (*) si et seulement si ${}^tM = -M$ (i.e. la matrice M est antisymétrique).

Donner une autre démonstration du résultat de la question 3/.

6. Soit f vérifiant (*).

Montrer que $\ker f \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$. En déduire que $\ker f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Que peut-on dire des sous-espaces vectoriels $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$?

PARTIE B. ENDOMORPHISMES VERIFIANT (*) POUR $n=2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$. On considère une application f non nulle vérifiant (*) et on se place dans une base orthonormée (i, j) de E .

7. Ecrire la forme générale d'une matrice antisymétrique de type $(2, 2)$.

Montrer que f est bijective.

8. En déduire que f est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une isométrie que l'on précisera.

PARTIE C. ENDOMORPHISMES VERIFIANT (*) POUR $n=3$

On suppose dans cette partie que $n = 3$. On considère une application f non nulle vérifiant (*) et on note M sa matrice dans une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$ de E .

9. Montrer que $\det M = 0$ (utiliser la question 5/). Que peut-t-on en déduire pour f ?

Montrer que la dimension du noyau de f est 1 ou 2.

Soient B_1 et B_2 des bases orthonormées de $\operatorname{Im} f$ et de $\ker f$ respectivement et $B' = B_1 \sqcup B_2$ la "concaténation" de ces deux bases.

10. Expliquer pourquoi B' est une base orthonormée de E .

11. Exhiber la forme générale d'une matrice antisymétrique de type $(3, 3)$.

En considérant la matrice de f dans la base B' montrer que le noyau de f ne peut être de dimension 2.

12. On a donc nécessairement $\dim \ker f = 1$.

Montrer que la matrice de f dans la base B' est $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$)

PARTIE D. ETUDE DE TROIS EXEMPLES

Dans la question suivante E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe (i, j, k) . Soit u un vecteur fixé de norme 1. On définit l'application g de E dans E par

$$\forall x \in E, g(x) = x \wedge u.$$

13. a. Montrer que g vérifie la propriété (*) (on pourra utiliser 1/).
Préciser le noyau et l'image de g .

13. b. Soit (e_1, e_2, u) une base orthonormée directe de E . Ecrire la matrice de g dans cette base.

Dans les six questions suivantes E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \varphi(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

14. Vérifier que φ est un produit scalaire de E .

Soit h l'endomorphisme de E défini pour tout P de E par

$$h(P) = 2P'(0)X^2 - [P(1) + P(-1)]X.$$

15. Vérifier que : $\forall P \in E, 2P'(0) = P(1) - P(-1)$.

16. En déduire que : $\forall P \in E, \varphi(h(P), P) = 0$

(cela implique que h vérifie la propriétés (*) d'après la question 1/).

On pose $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \frac{1}{2}h(P_1)$.

17. Montrer que la famille (P_1, P_2) est orthonormée dans E . Calculer $h(P_2)$ en fonction de P_1 .

18. Déterminer une base (P_3) de $\ker h$, avec $P_3 \in E$ de norme 1.

19. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormée de E et trouver la matrice A de h dans cette base.

Dans la question suivante on fixe deux réels distincts a et b et on considère l'espace vectoriel E défini par

$$E = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0\}.$$

On munit E du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Soit D l'endomorphisme de E défini par $D(f) = f'$.

20. Montrer que : $\forall (f, g) \in E^2, \langle D(f), g \rangle = -\langle f, D(g) \rangle$.

Corrigé :

Partie A

1. En prenant $x = y$ dans (*) on obtient $\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle$ soit $\langle f(x), x \rangle = -\langle f(x), x \rangle$ (le produit scalaire étant symétrique) donc $\langle f(x), x \rangle = 0$.

Soit u une application linéaire de E dans E telle que $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$. Pour x et y dans E on a donc $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$. D'autre part $\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x) + u(y), x+y \rangle$

(car u linéaire) et en développant par bilinéarité on obtient $\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle$, soit $\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle = 0$ vu l'hypothèse sur u . On a donc $\langle u(x), y \rangle = -\langle u(y), x \rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$ i.e. u vérifie (*).

2. Soit f vérifiant (*). Pour $(x, y, z) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \langle f(x+\lambda y), z \rangle &= -\langle x+\lambda y, f(z) \rangle \text{ (d'après (*))} \\ &= -\langle x, f(z) \rangle - \lambda \langle y, f(z) \rangle \\ &= \langle f(x), z \rangle + \lambda \langle f(y), z \rangle \text{ (d'après (*))} \\ &= \langle f(x) + \lambda f(y), z \rangle. \end{aligned}$$

L'égalité $\langle f(x+\lambda y), z \rangle = \langle f(x) + \lambda f(y), z \rangle$ étant valable pour tout $z \in E$ on en déduit que $f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$, c'est à dire que f est linéaire.

3. Condition nécessaire. Supposons que f vérifie (*). D'après 2/ f est linéaire; si $(x, y) \in E^2$ on a $\langle f^2(x), y \rangle = \langle f(f(x)), y \rangle = -\langle f(x), f(y) \rangle$ (d'après (*)) $= -\langle x, y \rangle$ (car f est une isométrie, donc conserve le produit scalaire) $= \langle x, -y \rangle$. Donc $\langle f^2(x), y \rangle = \langle -x, y \rangle$ pour tout $y \in E$ donc $f^2(x) = -x$ soit $f \circ f = -Id_E$.

Condition suffisante. Soit f une isométrie telle que $f \circ f = -Id_E$. Pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $\langle f(x), y \rangle = \langle f^2(x), f(y) \rangle$ (car f conserve le produit scalaire) $= \langle f \circ f(x), f(y) \rangle = \langle -x, f(y) \rangle$ (hypothèse) soit $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$ i.e. f vérifie (*).

4. Par définition de la matrice d'un endomorphisme on a, pour tout i et j de $\{1, \dots, n\}$, $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k$. En prenant le produit scalaire des deux membres avec e_i il vient $\langle e_i, u(e_j) \rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \langle e_i, e_k \rangle = a_{i,j}$ car $\langle e_i, e_k \rangle = 0$ si $k \neq i$ et 1 si $k = i$ (la base B étant orthonormée).

5. Condition nécessaire. Supposons que l'endomorphisme u vérifie la propriétés (*). Pour tout i et j de $\{1, \dots, n\}$ on a alors $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle = -\langle e_j, u(e_i) \rangle = -a_{ji}$ donc $M = -^t M$.

Condition suffisante. Supposons que $M = -^t M$, soit $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout i et j de $\{1, \dots, n\}$. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ dans E on a $\langle u(x), y \rangle = \left\langle u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right), \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u(e_i), \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle$ par linéarité de u , soit $\langle u(x), y \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \underbrace{\langle u(e_i), e_j \rangle}_{=a_{ji}} = -\sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ij} = -\sum_{i,j=1}^n x_i y_j \underbrace{\langle u(e_j), e_i \rangle}_{=a_{ij}} = \langle x, u(y) \rangle$, donc u vérifie (*).

Si u est une isométrie on $M^{-1} = {}^t M$. On a alors u vérifie (*) $\iff {}^t M = -M \iff M^{-1} = -M \iff M^2 = -I$ ce qui équivaut à $f \circ f = -Id_E$.

6. Soit $x \in \ker f$. Pour tout $y \in E$ on a $\langle x, f(y) \rangle = -\langle f(x), y \rangle = -\langle 0_E, y \rangle = 0$. Donc x est orthogonal à tout vecteur de $\text{Im } f$ i.e. $x \in \ker f \subset (\text{Im } f)^\perp$.

D'autre part $\dim \text{Im } f = n - \dim \ker f$ (théorème du rang) donc $\dim (\text{Im } f)^\perp = n - (n - \dim \ker f) = \dim \ker f$. Donc $\boxed{\ker f = (\text{Im } f)^\perp}$.

Comme $\text{Im } f$ et $(\text{Im } f)^\perp$ sont supplémentaires, on en déduit que $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires, i.e. $\boxed{E = \ker f \oplus \text{Im } f}$.

Partie B.

7. Une matrice antisymétrique s'écrit $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. D'après 5/ la matrice de f dans la base (i, j) est une matrice de ce type avec $a \neq 0$ (car $f \neq 0$). On a $\det M = a^2 \neq 0$ donc f est bijective.

8. La matrice M s'écrit $a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est celle de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc f est la composée de l'homothétie de rapport a et de r .

Partie C

9. On a $\det M = \det {}^t M = \det(-M) = (-1)^3 \det M = -\det M$ car d'après 5/ on a ${}^t M = -M$. Donc $\boxed{\det M = 0}$.

On en déduit que f n'est pas bijective (elle n'est ni injective ni surjective).

Comme f n'est pas injective on a $\ker f \neq \{0_E\}$ donc $\dim \ker f \geq 1$. Comme f est non nulle on a $\ker f \neq E$ donc $\dim \ker f \leq 2$. Donc $\boxed{\dim \ker f = 1 \text{ ou } 2}$.

10. Comme $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ alors B' est une base de E . De plus $\ker f = (\operatorname{Im} f)^\perp$ donc les vecteurs de B_1 sont orthogonaux à ceux de B_2 donc la base B' est orthonormée.

11. Une matrice antisymétrique de type $(3, 3)$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Si le noyau de f était de dimension 2 la matrice de f dans la base B' serait du type précédent avec ses deux dernières colonnes nulles donc $a = b = c = 0$ soit $M = 0$ ou encore $f = 0$, cas exclu par hypothèse.

12. Comme $\dim \ker f = 1$ la dernière colonne de M est nulle soit $b = c = 0$ donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie D

13. a. Il est clair que g est linéaire. Pour x dans E le vecteur $x \wedge u$ est orthogonal à x donc $\langle g(x), x \rangle = 0$. D'après la question 1/, g vérifie (*).

On a $x \in \ker g$ ssi $x \wedge u = 0_E$ ce qui équivaut à dire que x est colinéaire à u . $\ker g$ est la droite Δ engendrée par le vecteur u . D'après 6/ $\operatorname{Im} g$ est le plan orthogonal à Δ .

13. b. La base (e_1, e_2, u) étant orthonormée directe on a $u \wedge e_1 = e_2$ donc $g(e_1) = e_1 \wedge u = -e_2$. De même $e_2 \wedge u = e_1$ donc $g(e_2) = e_1$. Enfin $g(u) = u \wedge u = 0_E$. La matrice de g dans la base (e_1, e_2, u) est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Il est clair que φ est symétrique, bilinéaire, positive. Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P, P) = 0$ soit $(P(-1))^2 + (P(0))^2 + (P(1))^2 = 0$. Donc $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$. Comme P est de degré ≤ 2 et qu'il a trois racines distinctes deux à deux, c'est donc le polynôme nul. Donc φ est définie.

Conclusion : φ est un produit scalaire de E .

15. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$. On a $P' = 2aX + b$ donc $2P'(0) = 2b$ et $P(1) - P(-1) = (a + b + c) - (a - b + c) = 2b$ donc $\boxed{2P'(0) = P(1) - P(-1)}$.

16. On a $\varphi(h(P), P) = [h(P)](-1)P(-1) + [h(P)](0)P(0) + [h(P)](1)P(1)$. Or, en utilisant 15/, $h(P)(-1) = 2P'(0) + P(1) + P(-1) = 2P(1)$, $h(P)(1) = 2P'(0) - P(1) - P(-1) = -2P(-1)$ et $h(P)(0) = 0$, donc $\varphi(h(P), P) = 2P(1)P(-1) - 2P(-1)P(1) = 0$.

17. On a $\varphi(P_1, P_2) = \varphi(P_1, \frac{1}{2}h(P_1)) = \frac{1}{2}\varphi(P_1, h(P_1)) = 0$ d'après la question précédente, donc le système (P_1, P_2) est orthogonal. De plus $\varphi(P_1, P_1) = [P_1(-1)]^2 + [P_1(0)]^2 + [P_1(1)]^2 = 1$ donc $\|P_1\| = 1$. Comme $P_2 = h(P_1) = \frac{1}{2}(X^2 - X)$ on a de même $\|P_2\| = 1$.

Conclusion : le système (P_1, P_2) est orthonormé.

On a $h(P_2) = \frac{1}{2}h(X^2 - X) = -X^2 - X$ donc $\boxed{h(P_2) = -2P_1}$.

18. On a $P = aX^2 + bX + c \in \ker \varphi \iff 2P'(0)X^2 - [P(1) + P(-1)]X = 0$ ce qui équivaut au système $P'(0) = P(1) + P(-1) = 0$, soit $\begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$, soit $b = 0$ et $c = -a$.

On a ainsi $\ker \varphi = \{a(X^2 - 1) / a \in \mathbb{R}\}$. Donc $\boxed{P_3 = X^2 - 1}$ est une base de $\ker h$ et de plus $\|P_3\|^2 = [P_3(-1)]^2 + [P_3(0)]^2 + [P_3(1)]^2 = 0 + 1 + 0 = 1$ donc $\|P_3\| = 1$.

19. D'après 17/ et 18/ les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont de norme 1 et $P_1 \perp P_2$. On vérifie de plus que $\varphi(P_1, P_3) = \varphi(P_2, P_3) = 0$. Donc (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormée de E .

On a $h(P_1) = 2P_2$, $h(P_2) = -2P_1$ et $h(P_3) = 0$ d'où la matrice de φ dans la base orthonormée (P_1, P_2, P_3) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. Pour $(f, g) \in E^2$ on a $\langle D(f), g \rangle = \int_a^b f'(t) g(t) dt$. On intègre par parties en posant $u = g$ et $v' = f'$, donc $\langle D(f), g \rangle = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt = -\int_a^b f(t)g'(t) dt$ (car $f(a) = g(b) = 0$) donc $\boxed{\langle D(f), g \rangle = -\langle f, D(g) \rangle}$.