Pour tous réel a et b on pose : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ -a & a & b \\ b & b & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M(a,b)$.

On note E l'ensemble des matrices $M(a,b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Partie A : étude des matrices M(a,b) et de leur puissance

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M(3,3)$, espace vectoriel des matrices $(3,3)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Donner une base de E et sa dimension.

2. Calculer le déterminant de $M(a,b)$. Préciser les valeurs de a et b pour lesquelles la matrice $M(a,b)$ est inversible.

On pose $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3. Montrer que la matrice P est orthogonale. Calculer avec un minimum de calcul P^{-1}.

4. Montrer que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base (u,v,w) que l'on déterminera. Que peut-on dire de cette base ?

5. Montrer que la matrice de $f_{a,b}$ dans la base (u,v,w) est : $D = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & b\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -b\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Ecrire une relation entre $M(a,b)$ D et P.

6. Comment peut-on calculer $M(a,b)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?

Partie B : matrice M(a,b) orthogonales

7. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la matrice $M(a,b)$ est orthogonale.

8. On note $A = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Quelle est la nature de l'application f associée à la matrice A ? En préciser ses éléments caractéristiques.

Partie C : constructions de produits scalaires de $\mathbb{R}^3$

Soit N une matrice $(3,3)$ symétrique. Pour $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ éléments de $\mathbb{R}^3$ on pose

$$\varphi(U,V) = {}^t UNV.$$

On identifiera une matrice (α) de type $(1,1)$ avec son unique coefficient α.

9. Quelle est le type de la matrice ${}^tUNV$?

Montrer que l'application φ est une forme symétrique et bilinéaire.

Dans la suite on pose $N = \lambda I_3 + M(a,b)$, $Z = {}^t PU$ (la matrice P étant définie dans la question 2/) et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ (avec z_1, z_2 et z_3 réels).

10. Montrer que $\varphi(U,U) = {}^t Z(\lambda I_3 + D)Z = (\lambda + 2a) z_1^2 + \left(\lambda + b\sqrt{2}\right) z_2^2 + \left(\lambda - b\sqrt{2}\right) z_3^2$.

(D est la matrice définie dans la question 5/).

11. Montrer que si $\lambda > \max\left(-2a, |b|\sqrt{2}\right)$ alors φ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

12. Etudier la réciproque.

Correction :

Partie A

1. Pour tous réels a et b on a $M(a,b) = aJ + bK$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. E est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de J et K : c'est donc le sous-espace vectoriel de $M(3,3)$.

(J,K) est un système générateur de E. D'autre part on a : $aJ + bK = 0 \iff M_{a,b} = 0 \iff a = b = 0$, donc le système (J,K) est libre et c'est donc une base de E.

Par conséquent on a $\boxed{\dim E = 2}$.

2. Pour tous réels a et b on a : $\det M(a,b) = \begin{vmatrix} a & -a & b \\ -a & a & b \\ b & b & 0 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} a & -a & b \\ -2a & 2a & 0 \\ b & b & 0 \end{vmatrix}$, soit $\det M(a,b) = b \begin{vmatrix} -2a & 2a \\ b & b \end{vmatrix} = ab^2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ et $\boxed{\det M(a,b) = -4ab^2}$.

$M(a,b)$ est inversible ssi $\det M(a,b) \neq 0$ soit a et b non nuls.

3. Les colonnes de P forment un système orthonormé de $\mathbb{R}^n$ (muni de son produit scalaire canonique) donc la matrice P est orthogonale.

On a donc $P^{-1} = {}^t P$.

4. Soient u, v, w les colonnes de P. Le système (u,v,w) est est une base de $\mathbb{R}^3$ (système libre car orthonormé à 3 éléments). La matrice P est donc la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base orthonormée (u,v,w).

5. La matrice de $f_{a,b}$ dans la base (u,v,w) est $D = P^{-1} M(a,b) P = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & b\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -b\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

6. D'après 5/ on a $M(a,b) = PDP^{-1}$ et par une récurrence facile on a, pour tout entier naturel n : $M(a,b)^n = PD^nP^{-1}$ et $D^n = \begin{pmatrix} 2^n a^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(b\sqrt{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-b\sqrt{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

Partie B

7. La matrice $M(a,b)$ est orthogonale ssi ses colonnes forment un système orthonormé de $\mathbb{R}^n$ ce qui équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a^2 + b^2 & = & 2b^2 \; = 1 \\ -2a^2 + b^2 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

qui équivaut à $a^2 = 1/4$ et $b^2 = 1/2$, soit $\boxed{a = \pm\frac{1}{2} \text{ et } b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

8. D'après la question précédente la matrice A est orthogonale donc f est une isométrie.

Son déterminant vaut $+1$ (c'est le déterminant de la matrice D avec $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$), donc f est une rotation. Un vecteur de coordonnées (x,y,z) est invariant ssi x, y, z sont solution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y + \sqrt{2}z & = & 2x \\ x - y + \sqrt{2}z & = & 2y \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y & = & 2z \end{array} \right.$, qui équivaut à $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & \sqrt{2}x \end{array} \right.$. L'axe de f est donc la droite Δ engendrée par le vecteur de coordonnées $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$.

En considérant la matrice réduite de f, l'angle θ de f vérifie $2\cos\theta + 1 = tr(A) = -1$ soit $\cos\theta = -1$ et $\theta \equiv \pi \,(2\pi)$.

Conclusion : f est le demi-tour d'axe Δ.

Partie C

9. Les matrices ${}^tU, N$ et V sont respectivement de type $(1,3), (3,3), (3,1)$ donc ${}^tUNV$ est de type $(1,1)$.

On a donc ${}^t({}^tUNV) = {}^tUNV$, soit ${}^tVNU = {}^tUNV$ (car ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$), c'est à dire $\varphi(V,U) = \varphi(U,V)$, donc φ est symétrique.

De plus on vérifie facilement qu'elle est linéaire par rapport à la première composante donc *φ est une forme bilinéaire symétrique.*

10. On a $\varphi(U,U) = {}^tU(\lambda I_3 + M(a,b))U$. Or $M(a,b) = PDP^{-1} = PD{}^tP$, donc $\lambda I_3 + M(a,b) = \lambda I_3 + PDP^{-1} = P(\lambda I_3 + D)P^{-1} = P(\lambda I_3 + D){}^tP$. On a donc $\varphi(U,U) = {}^tUP(\lambda I_3 + D){}^tPU$ soit $\boxed{\varphi(U,U) = {}^tZ(\lambda I_3 + D)Z}$.

Un calcul facile donne alors $\varphi(U,U) = (\lambda + 2a)z_1^2 + (\lambda + b\sqrt{2})z_2^2 + (\lambda - b\sqrt{2})z_3^2$.

11. Si $\lambda > \max(-2a, \sqrt{2}|b|)$ alors on a $\lambda > -2a$, $\lambda > b\sqrt{2}$ et $\lambda > -b\sqrt{2}$ donc pour tout U on a $\varphi(U,U) \geq 0$ d'après la relation précédente.

De plus on a $\varphi(U,U) = 0$ ssi $z_1^2 = z_2^2 = z_3^2 = 0$, soit $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ ou $Z = 0$. Comme $U = PZ$ alors $U = 0$ donc la forme φ est définie.

Conclusion : φ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

12. Si φ est un produit scalaire on a, en prenant $z_1 = 1$ et $z_2 = z_3 = 0$ dans la relation du 10/ il vient $\varphi(U,U) = (\lambda + 2a) > 0$ (car φ est définie positive) donc $\lambda > -2a$. De même, en prenant $z_1 = 0$ $z_2 = 1$ et $z_3 = 0$ on obtient $\lambda + b\sqrt{2} > 0$, soit $\lambda > -b\sqrt{2}$ et en prenant $z_1 = z_2 = 0$ et $z_3 = 1$: $\lambda - b\sqrt{2}$ soit $\lambda > b\sqrt{2}$. Finalement on a $\lambda > \max(-2a, |b|\sqrt{2})$.

Conclusion : φ est un produit scalaire ssi $\lambda > \max(-2a, |b|\sqrt{2})$.