$\boxed{\textbf{FC1}}$ Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|. \tag{1}$$

1. Préciser les ensembles de définition, continuité et dérivabilité de f.

Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 1. Ce prolongement est-il dérivable ?

Préciser l'allure de la courbe de la fonction ainsi prolongée au voisinage de 1.

2. Etudier la parité de f.

3. Calculer le développement limité de f à l'ordre 5 en 0.

En déduire l'allure de la courbe au voisinage de 0.

4. A l'aide d'un développement limité généralisé de f au voisinage de $\pm\infty$ montrer que le graphique de f possède une asymptote oblique. Préciser sa position par rapport à l'asymptote.

5. Calculer $f'(x)$. On écrit $f'(x) = 2x \times g(x)$.

Montrer que $g'(x)$ a la signe de $1 - x^2$.

Etudier la fonction g (pour $x > 0$). Montrer que g s'annule une et une seule fois en α sur $]0, +\infty[$ (on donne $\alpha \cong 0,65$).

6. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Tracer le graphique de (C_f) de f.[ex11.2017]

<u>*Correction*</u> : **1.** $f(x)$ est définie pour x tel que $\frac{x+1}{x-1} \neq 0$ et $x \neq 1$ soit $D_f = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}}$.

Posons $x = 1 + h$. On a $h \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = (h^2 + h) \ln \left| \frac{2+h}{h} \right| = (h^2 + h) \ln |2 + h| - h(h+1) \ln |h|$. Comme $h \ln |h| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ on a $\lim\limits_{h \to 0} f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$.

De plus $\tau_h = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = (h+1) \ln |2 + h| - (h+1) \ln |h|$ qui tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0, donc le prolongement de f en 1 n'est pas dérivable en 1.

Le graphique admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

2. Pour tout $x \in D_f$ on a $f(-x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right| = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = -(x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$ donc f est impaire.

3. Au voisinage de 0 on a $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \frac{1+x}{1-x}$ donc $f(x) = (x^2 - 1) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = (x^2 - 1) [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$.

On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ et $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ donc $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o(x^5)$ et $f(x) = (x^2 - 1) \left(2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o(x^5) \right)$ soit $\boxed{f(x) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)}$.

La fonction f a un dl à l'ordre 1 : $f(x) = -2x + o(x)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$; comme $f(x) - (-2x) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$ la courbe est au dessus-de sa tangente dans un voisinage de 0 à droite et en dessous dans un voisinage de 0 à gauche (donc O est point d'inflexion).

4. Posons $h = \frac{1}{x}$, donc $h \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1-h^2}{h} \ln \left(\frac{1+h}{1-h} \right)$ (dans un voisinage de 0).

On a donc $f(x) = -\frac{1}{h} f(h) = \frac{2}{h} - \frac{4}{3}h + o(h)$ donc

$$f(x) = 2x - \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le graphique (C) de f a donc, au voisinage de $\pm\infty$, une asymptote oblique D d'équation $y = 2x$. De plus $f(x) - 2x = -\frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ donc C est en dessous de D au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.

5. f est dérivable sur D_f comme produit et composée de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = 2x \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \left(x^2-1\right)\frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}},$$

soit $f'(x) = 2x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2 = 2x\left(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{x}\right) = 2x \times g(x)$, avec $g(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{x}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et $g'(x) = \frac{2}{(1-x^2)} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(1-x^2)}$ du signe de $1 - x^2$.

D'après le théorème de la bijection g s'annule une seule fois entre 0 et 1 (g étant dérivable sur $]0,1[$ et strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$) et ne s'annule par sur $]1,+\infty[$.

6. On déduit du 5/ le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+ - \{1\}$.