

FC2 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} e^{\frac{1}{x}}.$$

1. Donner un équivalent de f en $\pm\infty$.

2. Préciser l'ensemble de définition, de continuité et les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f .

On montrera que f a une limite finie l en 0 à gauche et on prolongera f en 0 en posant $f(0) = l$.

3. Le prolongement de f en 0 est-il dérivable à gauche en 0 ?

Que peut-on en déduire pour le graphique de f ?

4. Donner l'ensemble de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

On montrera que $f'(x)$ a le signe de $\frac{x-1}{x^3}$ c'est à dire de $x(x-1)$.

Dresser le tableau de variation de f .

5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = -1$.

Que peut-on en déduire pour le graphique C_f de f ?

Tracer C_f .

Correction : 1. On a $e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1$ donc $e^{\frac{1}{x}} \sim_{\pm\infty} 1$. D'autre part on a $\frac{(x-1)^2}{x} \sim_{\pm\infty} x$ (rapport des termes de plus hauts degrés) donc $f(x) \sim_{\pm\infty} x$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composées de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

D'après 1/ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Quand x tend vers 0^+ on a $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ et $\frac{(x-1)^2}{x} \rightarrow +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Pour la limite en 0^- on pose $h = \frac{1}{x}$, donc $h \rightarrow -\infty$ et $f(x) = \frac{(1/h-1)^2}{1/h} e^h = \frac{(1-h)^2}{h} e^h \sim_{-\infty} h e^h$.

Or $\lim_{h \rightarrow -\infty} h^2 e^h = 0$ (limites classiques) donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

En prolongeant f en 0 par $f(0) = 0$ on obtient une fonction continue en 0 à gauche.

3. Le taux d'accroissement de f en 0 est $\tau = \frac{(x-1)^2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$. En posant $h = \frac{1}{x}$ on obtient $f(x) = (1-h)^2 e^h \sim_{-\infty} h^2 e^h \xrightarrow{h \rightarrow -\infty} 0$, donc le taux d'accroissement de f tend vers 0 en 0^+ .

La fonction f est donc dérivable en 0 à gauche et $f'_g(0) = 0$.

Le graphique de f présente en 0 une demi-tangente horizontale.

4. Pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = \frac{2(x-1)x-(x-1)^2}{x^2} e^{1/x} - \frac{(x-1)^2}{x} \times \frac{1}{x^2} e^{1/x} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{x^3} e^{1/x}$, du signe de $\frac{x-1}{x^3}$ ou de $x(x-1)$.

5. En posant $h = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, on obtient d'après 2/, $f(x) = \frac{(1-h)^2}{h} e^h = (h-2+\frac{1}{h}) e^h$, donc $f(x) - x = (h-2+\frac{1}{h}) e^h - \frac{1}{h} = h e^h - 2 e^h + \frac{e^h-1}{h}$.

On a $h e^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, $-2 e^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} -2$ et $\frac{e^h-1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$, donc $(h-2+\frac{1}{h}) e^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} -1$ d'où $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = -1$.

On en déduit que le graphique de f admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$.

