FC3 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

1. A l'aide d'un developpement limité montrer que (C) a une asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$ et préciser la position de la courbe (C) par rapport à cette asymptote.

2. Etudier la variations de f. On pourra écrire $f'(x) = x \times g(x)$ et on étudiera les variations de la fonction g (on montrera que $g'(x) = -\frac{x^2+4x+6}{(x^2+2x+2)^2}$).

Dresser le tableau de variation de f et les limites aux bornes.

3. Préciser si f est prolongeable par continuité en -1 et préciser les pentes des éventuelles tangentes (ou demi-tangentes).

4. Tracer le graphique de f dans un repère orthonormé.[ex15.2014]

Correction : **1.** Posons $h = \frac{1}{x}$. On a $h \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = \frac{1}{h^2}\arctan\left(\frac{1}{1+1/h}\right) = \frac{1}{h^2}\arctan\left(\frac{h}{1+h}\right) = \varphi(h)$.

Comme on veut obtenir un développement limité généralisé de φ jusqu'en $o(h)$ on effectue un dl de $\arctan\left(\frac{h}{1+h}\right)$ à l'ordre 3. On a $\frac{1}{1+h} = 1-h+h^2+o(h^2)$ donc $\frac{h}{1+h} = h-h^2+h^3+o(h^3)$, puis $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + ...$ avec $u = h - h^2 + h^3 + o(h^3)$.

On a $u^2 = h^2 - 2h^3 + o(h^3), u^3 = h^3 + o(h^3)$, donc $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(h^3) = h - h^2 + h^3 - \frac{h^3}{3} + o(h^3)$, soit $\arctan(u) = h - h^2 + \frac{2h^3}{3} + o(h^3)$.

On a donc $\varphi(h) = \frac{1}{h} - 1 + \frac{2h}{3} + o(h)$ et en revenant à x : $\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$.

On en déduit qu'au voisinage de $\pm\infty$ la courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$. Au voisinage de $+\infty$ (C) est au dessus de l'asymptote et en dessous au voisinage de $-\infty$.

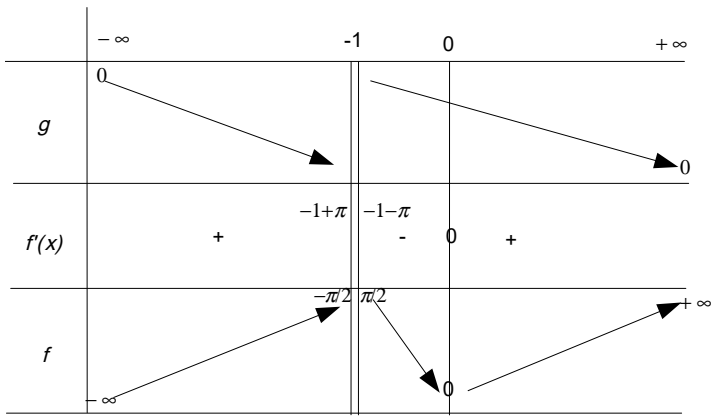
2. La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ et est continue et dérivable sur D comme produit et composée de fonctions continues et dérivables.

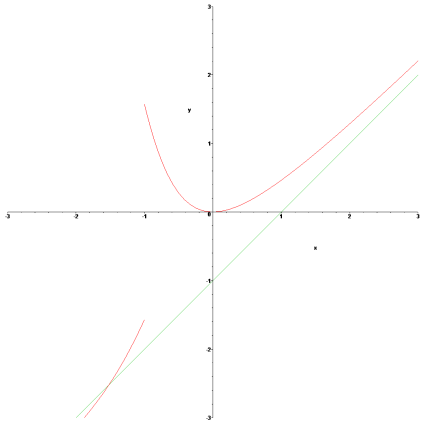
Pour tout x de D on a : $f'(x) = 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + x^2.\frac{-1/(1+x)^2}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}$, soit $f'(x) = 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x^2}{x^2+2x+2} = x \times g(x)$ avec $g(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{x^2+2x+2}$.

Pour tout x de D on a : $g'(x) = 2\frac{-1/(1+x)^2}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2} - \frac{x^2+2x+2-x(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{x^2+4x+6}{(x^2+2x+2)^2}$.

Le trinôme $x^2 + 4x + 6$ étant toujours strictement positif, on a $g'(x) < 0$ pour tout $x \in D$. Le tableau de variation de g montre que $g(x) < 0$ sur $]-\infty, -1[$ et $g(x) > 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Quand x tend vers -1^+, $\frac{1}{1+x}$ tend vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et de même $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.





3. On ne peut pas prolonger f par continuité en -1 car f n'a pas de limite en -1.

Cependant, comme f tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers -1 à droite, on peut prolonger f par continuité à droite en posant $f(-1) = \frac{\pi}{2}$. De plus comme $\lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = -1 - \pi$ ce prolongement est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = -1 - \pi$.

De même comme f tend vers $-\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers -1 à gauche, on peut prolonger f par continuité à gauche en posant $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$. De plus comme $\lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = -1 + \pi$ ce prolongement est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = -1 + \pi$.