On rappelle que pour tout réel non nul x on a

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

On définit la fonction f par

$$f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

On note D son ensemble de définition.

Variations de f

1. Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ quand cela a un sens.

2. Calculer $f"(x)$ (on trouvera une expression de la forme $f"(x) = \frac{\alpha x+\beta}{(P(x))^2}$, où P est un polynôme du second degré et α et β deux constantes réelles).

3. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f'. En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f' et f (noter que l'équation $f'(x) = 0$ a une racine évidente).

4. Donner un équivalent simple de f au voisinage de $\pm\infty$ et en déduire les limites de f aux bornes de D.

Etude au voisinage de $x = 1$

5. Donner une expression de f sur $I_0 =]0, 1[$ et sur $I_1 =]1, +\infty[$ à l'aide de la fonction g définie par $g(x) = x \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

6. Calculer le developpement limité de g en $x = 1$ à l'ordre 3.

7. En déduire le developpement limité de f au voisinage de 1 à l'ordre 3 lorsque $x \in I_0$ puis lorsque $x \in I_1$.

Interpréter graphiquement ces résultat et faire un schéma.

Etude asymptotique

8. Calculer le developpement limité en $h = 0$ à l'ordre 1 de la fonction φ définie par $\varphi(h) = \frac{1}{2-2h+h^2}$.

9. Soit la fonction Φ définie par $\Phi(h) = \arctan\left(\frac{1}{1-h}\right)$. Calculer $\Phi'(h)$.

En déduire le développement limité à l'ordre 2 de Φ en $h = 0$.

10. Déduire de ce qui précède qu'au voisinage de plus et moins l'infini on

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Que peut-on en déduire sur le graphique de f ?

Conclusion

11. Tracer l'allure du graphique de f.

Correction :

1. f est définie, continue et dérivable (composée de fonctions continues et dérivable) sur $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et, $\forall x \neq 1$, $f'(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) + x.\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2} = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{x}{(x-1)^2+x^2}$, soit

$$\boxed{f'(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{x}{2x^2-2x+1}}.$$

2. De même f' est dérivable sur D et $f"(x) = \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2} - \frac{\left(2x^2-2x+1\right)-x(4x-2)}{(2x^2-2x+1)^2} = -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{-2x^2+1}{(2x^2-2x+1)^2}$, soit $\boxed{f"(x) = \frac{2(x-1)}{(2x^2-2x+1)^2}}$.

3. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{\pi}{2} - 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\frac{\pi}{2} - 1$, d'où le tableau suivant

4. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

5. Si $x \in]0,1[$ on a $\frac{x}{x-1} < 0$ donc, d'après la question 1/, $\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$ donc $\boxed{f(x) = -\frac{\pi x}{2} - g(x) \text{ pour } x \in]0,1[}$. Si $x \in]1,+\infty[$ on a $\frac{x}{x-1} > 0$ donc, d'après la question 1/, $\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$ donc $\boxed{f(x) = \frac{\pi x}{2} - g(x) \text{ pour } x > 1}$.

6. Posons $x = 1 + h$, donc $h \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et $g(x) = (1+h)\arctan\left(\frac{h}{1+h}\right)$. On a $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + o(h^2)$, donc $\frac{h}{1+h} = h - h^2 + h^3 + o(h^3)$. Comme $\arctan u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ au voisinage de 0 on a, en posant $u = h - h^2 + h^3 + o(h^3)$, $u^2 = h^2 - 2h^3 + o(h^3)$, $u^3 = h^3 + o(h^3)$, soit $\arctan\left(\frac{h}{1+h}\right) = h - h^2 + h^3 - \frac{h^3}{3} + o(h^3) = h - h^2 + \frac{2h^3}{3} + o(h^3)$. Donc $(1+h)\arctan\left(\frac{h}{1+h}\right) = (1+h)\left(h - h^2 + \frac{2h^3}{3} + o(h^3)\right) = h - \frac{h^3}{3} + o(h^3)$, d'où, en revenant à x, $\boxed{g(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3} + o(x-1)^3}$.

7. Des questions 6/ et 7/ on déduit $f(x) = -\frac{\pi x}{2} - (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + o(x-1)^3$ pour $x \in]0,1[$, et $f(x) = \frac{\pi x}{2} - (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + o(x-1)^3$ pour $x \in]1,+\infty[$.

Au voisinage de 1 à gauche le graphique C_f de f adment une tangente d'équation $y = -\frac{\pi x}{2} - (x-1) = \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right)x + 1$ et C_f est en dessous de cette tangente (car $f(x) - \left[\left(-\frac{\pi}{2} - 1\right)x + 1\right] = \frac{(x-1)^3}{3} + o(x-1)^3 < 0$ dans un voisinage de 1 à droite) et dans un voisinage de 1 à droite le graphique C_f de f adment une tangente d'équation $y = \frac{\pi x}{2} - (x-1) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x + 1$ et C_f est au dessus de cette tangente dans un voisinage de 1 à droite.

8. On a $\varphi(h) = \frac{1}{2-2h+h^2} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-h+\frac{h^2}{2}} = \frac{1}{2}.(1 + h + o(h))$.

9. Pour $h \neq 1$ on a $\Phi'(h) = \frac{\left(\frac{1}{1-h}\right)'}{1+\left(\frac{1}{1-h}\right)^2} = \frac{\frac{1}{(1-h)^2}}{1+\left(\frac{1}{1-h}\right)^2} = \frac{1}{(1-h)^2+1} = \frac{1}{2-2h+h^2} = \varphi(h)$.

En intégrant le développement limité de $\varphi(h)$ on obtient $\Phi(h) = \frac{1}{2}.\left(h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) + C$. En remplaçant h par 0 on obtient $\arctan 1 = C$ soit $C = \frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{\Phi(h) = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)}$.

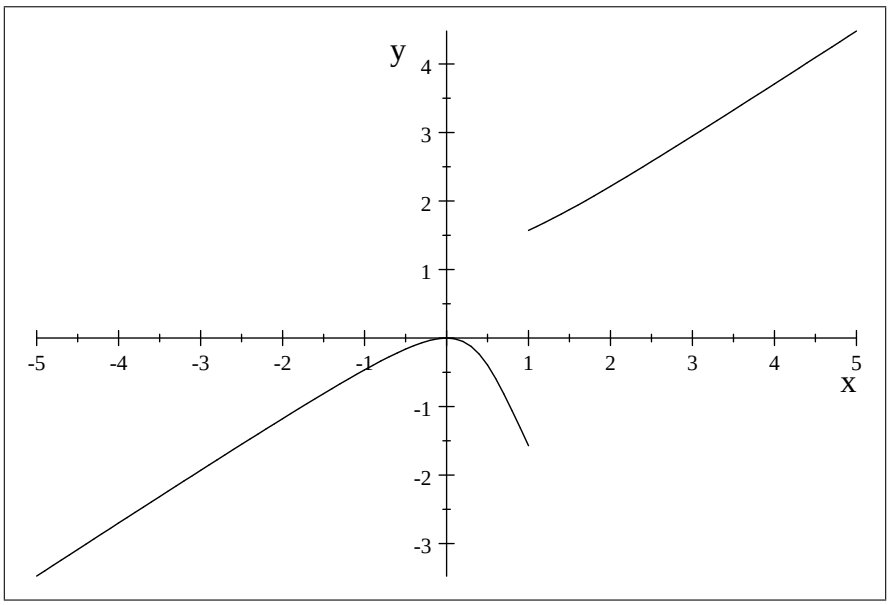
10. On a $f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h}\arctan\left(\frac{1/h}{1/h-1}\right) = \frac{1}{h}\arctan\left(\frac{1}{1-h}\right) = \frac{\Phi(h)}{h}$.

D'après 10/ on a donc $f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi}{4h} + \frac{1}{2} + \frac{h}{4} + o(h)$.

Posons $x = \frac{1}{h}$. On a $h \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) = f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi}{4h} + \frac{1}{2} + \frac{h}{4} + o(h)$, soit $\boxed{f(x) = \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$ au voisinage de $\pm\infty$.

On en déduit que C_f admet au voisinage de $\pm\infty$ une asymptote oblique D d'équation $y = \frac{\pi x}{4} + \frac{1}{2}$. Au voisinage de $+\infty$ C_f est au dessus de D et au voisinage de $-\infty$ C_f est en dessous de D.

11.


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5