

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\text{sh}(x)}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = a$.

1. Montrer qu'il existe une valeur de a telle que f soit continue en 0.

Désormais a aura cette valeur.

2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

3. Montrer que f est de classe C^1 en 0.

4. Montrer que pour tout réel t on a $\text{ch}(t) - t > 0$.

5. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$ on a

$$0 \leq t \text{ch}(t) - \text{sh}(t) \leq \frac{1}{2} \text{sh}^2(t).$$

6. Etudier les variations de f . Donner un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Montrer que l'équation $\text{sh}(x) = 1$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et justifier que $\alpha \in]0, 1[$.

(on donne $\text{sh}(1) > 1$).

8. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Correction :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\text{sh}(x)}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = a$.

1. Au voisinage de 0 on a $\text{sh}(x) \sim x$ donc $f(x) \sim 1$, soit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

f est donc continue en 0 ssi $\boxed{a = 1}$.

2. Le taux d'accroissement de f en 0 est $\tau = \frac{\frac{\text{sh}(x)}{x} - 1}{x} = \frac{\text{sh}(x) - x}{x^2}$. Faisons un dl de $\text{sh}(x)$ en 0 à l'ordre 2 : $\text{sh}(x) = x + o(x^2)$ donc $\tau = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. f est donc dérivable en 0 et

$$\boxed{f'(0) = 0}.$$

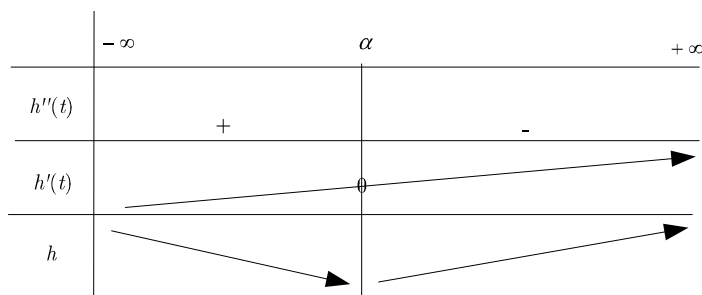
3. Il s'agit de montrer que f' est continue en 0. Pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = \frac{\text{sh}(x) - x \text{ch}(x)}{x^2}$.

Pour trouver la limite de f' en 0 on fait un dl du numérateur à l'ordre 2 : $\text{sh}(x) = x + o(x^2)$ et $\text{ch}(x) = 1 + o(x^2)$ donc $x \text{ch}(x) = x + o(x^2)$ et $f'(x) = \frac{o(x^2)}{x^2} = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Comme $f'(0) = 0$, f' est continue en 0, donc f est de classe C^1 en 0.

Remarque : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car f' est continue sur $\mathbb{R}^*$.

4. Soit la fonction h définie par $h(t) = \text{ch}(t) - t$ sur $\mathbb{R}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(t) = \text{sh}(t) - 1$ et $h''(t) = \text{ch}(t) > 0$. Soit α l'unique réel tel que $\text{sh}(\alpha) = 1$ (voir 7/). On a $\text{ch}(\alpha) = \sqrt{1 + \text{sh}^2(\alpha)} = \sqrt{2}$, donc $h(\alpha) = \text{ch}(\alpha) - \alpha = \sqrt{2} - \alpha > 0$ ($\alpha \simeq 0,88$).

D'après le tableau de variation on a $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) > 0$, soit $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) - t > 0}$.



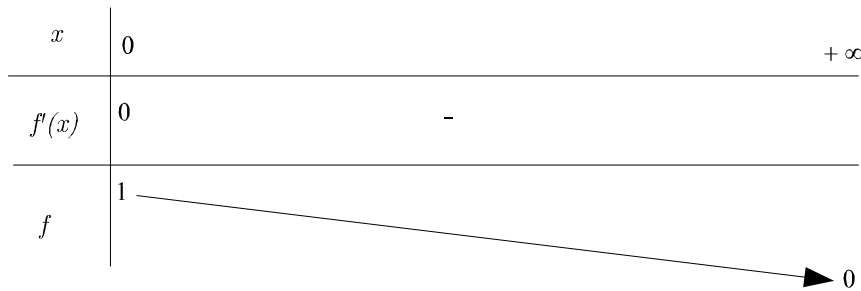
5. Soit φ définie par $\varphi(t) = t\text{ch}(t) - \text{sh}(t)$. Pour tout réel t on a $\varphi'(t) = t\text{sh}(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$. Comme $\varphi(0) = 0$ alors $\varphi(t) \geq 0$ soit $0 \leq t\text{ch}(t) - \text{sh}(t)$ pour $t \geq 0$.

De même posons $\psi(t) = \frac{1}{2}\text{sh}^2(t) - t\text{ch}(t) + \text{sh}(t)$. Pour tout réel t on a $\psi'(t) = \text{sh}(t)\text{ch}(t) - t\text{sh}(t) = \text{sh}(t)(\text{ch}(t) - t)$. Pour $t \geq 0$ on a $\text{sh}(t) \geq 0$ et $\text{ch}(t) - t > 0$ d'après 4/, donc $\psi'(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$. Comme $\psi(0) = 0$ on a $\psi(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq t\text{ch}(t) - \text{sh}(t) \leq \frac{1}{2}\text{sh}^2(t)}$.

6. f étant paire on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. D'après 5/ on a $f'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\text{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$ on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x}{e^x} = 2xe^{-x}$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. D'où le TV de f sur $\mathbb{R}_{+0}$.



7. La fonction sh est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$, donc sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection. L'équation $\text{sh}(x) = 1$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Comme $\text{sh}(0) = 0$ et $\text{sh}(1) > 1$ on a $\alpha \in]0, 1[$.

8. Remarquons que α vérifie $f(\alpha) = \alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on écrit :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)|.$$

On applique le théorème des accroissements finis à f (dérivable) sur l'intervalle d'extrémités α et u_n : $\exists c \in]\alpha, u_n[/ f(u_n) - f(\alpha) = f'(c)(u_n - \alpha)$, soit $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| \cdot |u_n - \alpha|$.

Or, si $x \neq 0$, $|f'(x)| = \frac{|\text{sh}(x) - x\text{ch}(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{2}$ (inégalité valable aussi si $x = 0$ car $f'(0) = 0$) d'après 5/, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|}$.

Par une récurrence évidente (ou un procédé en casacade) on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha|.$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$) on en déduit, grâce au théorème de l'étau, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ soit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}$.