Pour n entier naturel non nul on considère l'application f_n par :

$$f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 0.$$

Soit (C_n) le graphique de f_n dans un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n.

On précisera l'allure de la courbe au voisinage de 0 (on montrera que le graphique de f_n admet en O une demi-tangente à droite que l'on précisera).

2. Etudier les variation de f_n sur $\mathbb{R}$.

3. Trouver des réels a_n, b_n et c_n, tels que, au voisinage de plus ou moins l'infini :

$$f_n(x) = a_n x + b_n + \frac{c_n}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En déduire que (C_n) admet une asymptote oblique au voisinage de plus ou moins l'infini et préciser la position de (C_n) par rapport à cette asymptote.

Donner l'allure de (C_n).

4. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 1$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$.

5. On considère la fonction g définie par $g(x) = x\ln(x)$.

a. Etudier les variations de g sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} et en donner son tableau de variation. Rappeler les propriétés de g^{-1}.

b. En remarquant que pour tout entier naturel non nul n on a $u_n \ln(u_n) = n$ et en utilisant g^{-1} montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

6. En utilisant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, montrer que $\ln u_n \sim \ln n$, puis que (u_n) est équivalente à $\frac{n}{\ln n}$ au voisinage de $+\infty$.

Correction :

1. La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

Continuité en 0 : comme $-\frac{n}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty$ on a $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = 0$.

Pour la limite en 0^- on pose $X = -\frac{n}{x} \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f_n(x) = -n\frac{e^X}{X} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^-} f_n(x) = -\infty$. La fonction f_n n'a pas de limite en 0 donc elle n'est pas continue en 0.

Remarque : on a $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$ donc f_n est continue à droite en 0.

Dérivabilité en 0 : f_n n'est pas dérivable à gauche en 0 car elle n'y est pas continue. Pour étudier la dérivabilité à droite on calcule le taux de variation en 0 : $\tau = \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x} = e^{-n/x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$ (et $+\infty$ à gauche de 0) donc f_n est dérivable à droite en 0 (de dérivée à droite 0).

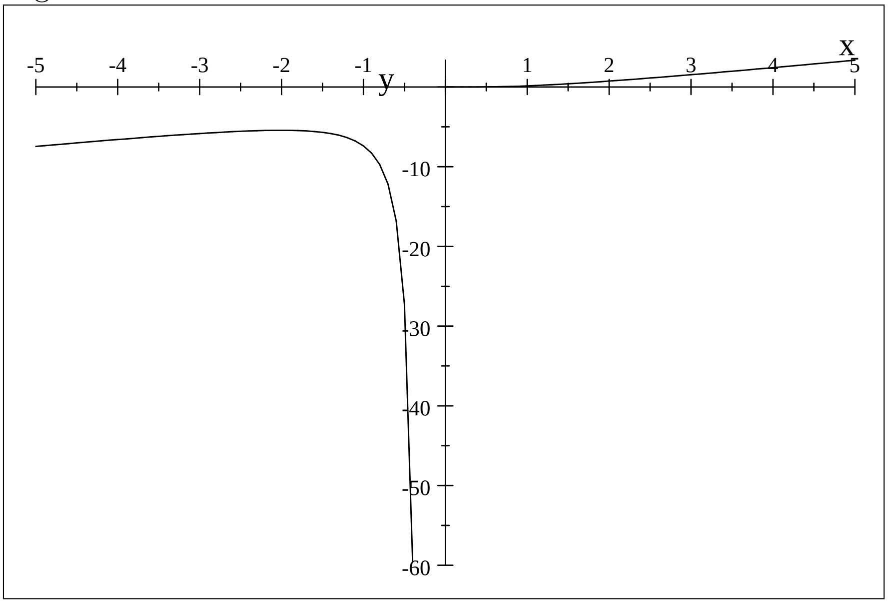
Le graphique (C_n) de f_n admet en 0 deux demi-tangentes, horizontale à droite et verticale à gauche (O est donc un point anguleux de (C_n)).

2. Pour $x \neq 0$ on a $f_n'(x) = e^{-n/x}\frac{x+n}{x}$ du signe de $\frac{x+n}{x}$.

En $\pm\infty$ on a $f_n(x) \sim x$ (car $e^{-n/x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1$) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.

3. En posant $h = \frac{n}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ on a $f_n(x) = \frac{n}{h}e^{-h}$. On fait un dl de e^{-h} à l'ordre 2 en 0 : $e^{-h} = 1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ soit $f_n(x) = \frac{n}{h} - n + \frac{nh}{2} + o(h)$, ou $f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$.

On en déduit qu'au voisinage de $\pm\infty$ (C_n) admet une asymptote oblique D_n d'équation $y = nx - n$; au voisinage de $+\infty$ le graphique (C_n) est au dessus de D_n et en dessous au voisinage de $-\infty$.



4. Sur $\mathbb{R}_-$ on a $f_n(x) < 0$ donc l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}_-$.

Sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n est continue et strictment croissante donc c'est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\left[f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= [0,+\infty[$. Comme $1 \in [0,+\infty[$ l'équation $f_n(x) = 1$ a une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_+$. De plus $f_n(1) = e^{-n} < 1 = f_n(u_n)$ donc $1 < u_n$ (la fonction f_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$).

5. a. La fonction g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $g'(x) = \ln(x) + 1 > 0$ sur cet intervalle.

g est continue est strictement croissante de $[1,+\infty[$ donc c'est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, g^{-1} est continue, strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et c'est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

b. u_n vérifie pour tout $n \in n^*$, $u_n e^{-n/u_n} = 1$ soit $u_n = e^{n/u_n}$, ou $\ln(u_n) = \frac{n}{u_n}$, donc $u_n \ln(u_n) = n$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(u_n) = n$, ce qui équivaut à $u_n = g^{-1}(n)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = +\infty$, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

c. La fonction g^{-1} étant strictement croissante sur $[0,+\infty[$ on a $g^{-1}(n) < g^{-1}(n+1)$, soit $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6. De la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$ on déduit $\frac{\ln u_n}{\ln n} = 1 - \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln n}$ (pour $n \geq 2$).

De plus, comme (u_n) tend vers $+\infty$, on a $u_n > e$ pour n assez grand; donc $\ln(\ln(u_n)) > 0$ soit $\ln u_n = \ln n - \ln(\ln u_n) < \ln n$ pour n assez grand. On a donc $0 < \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln n} < \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln n} = 0$ (car $\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). La relation $\frac{\ln u_n}{\ln n} = 1 - \frac{\ln(\ln u_n)}{\ln n}$ donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = 1$ soit $\ln u_n \sim \ln n$.

De plus $u_n = \frac{n}{\ln(u_n)}$ donc finalement on a $\boxed{u_n \sim \frac{n}{\ln n}}$.