Exercices Etude de fonctions

$\boxed{1}$ Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

1. A l'aide d'un developpement limité montrer que (C) a une asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$ et préciser la position de la courbe (C) par rapport à cette asymptote.

2. Etudier la variations de f. On pourra écrire $f'(x) = x \times g(x)$ et on étudiera les variations de la fonction g (on montrera que $g'(x) = -\frac{x^2+4x+6}{(x^2+2x+2)^2}$).

Dresser le tableau de variation de f et les limites aux bornes.

3. Préciser si f est prolongeable par continuité en -1 et préciser les pentes des éventuelles tangentes (ou demi-tangentes).

4. Tracer le graphique de f dans un repère orthonormé.

$\boxed{2}$ Pour tout entier k supérieur ou égal à 2 on considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par $f_k(x) = \dfrac{\ln^k(x)}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $f_k(1) = 0$.

1. Etude des fonctions $\mathbf{f}_k$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_k.

b. On considère la fonction auxiliaire φ_k définie pour $x > 0$ par : $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln(x)$.

Etudier les variations de la fonction φ_k. Montrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$.

On notera dans la suite a_k cette solution.

c. Montrer que $f_k'(x)$ a le signe de $\ln^{k-1} x \times \varphi_k(x)$. En distinguant les cas $k=2$, k pair supérieur ou égal à 4 et k impair supérieur ou égal à 3 donner le tableau de variation de f_k.

2. Etude de la suite $(\mathbf{a}_k)$.

On rappelle que a_k est la solution de l'équation $\varphi_k(x) = 0$.

a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 on a :

$e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$.

b. Pour tout entier k supérieur ou égal à 2 on considère la suite (δ_k) définie par $a_k = e^k(1+\delta_k)$.

Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a : $-ke^{-k} = (1+\delta_k)\ln(1+\delta_k)$.

En déduire l'inégalité : $|\ln(1+\delta_k)| \leq ke^{1-k}$ puis que (δ_k) converge vers 0.

c. Montrer que la suite (δ_k) est équivalente à $-ke^{-k}$. Conclure que l'on a, au voisinage de plus l'infini : $a_k = e^k - k + o(k)$.

3. Etude d'une valeur approchée de $\mathbf{a}_2$

a. Montrer que sur l'intervalle $I = [e; e^2]$, a_2 est solution de l'équation $x = \dfrac{2(x-1)}{\ln(x)}$.

On définit la fonction g sur l'intervalle $I = [e; e^2]$ par $g(x) = \dfrac{2(x-1)}{\ln(x)}$.

b. En admettant que la fonction g' est décroissante sur I, montrer qu'il existe un réel $k \in [0;1[$ tel que : $\forall x \in I, 0 \leq g'(x) \leq k$.

c. On définit la suite (x_n) par $x_0 = e$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer que la suite (x_n) converge vers a_2.

$\boxed{3}$ Etudier la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}.$$

On étudiera en particulier l'ensemble de continuité et de dérivabilité de f et l'existence d'asymptotes obliques et leur position par rapport au graphique de f.

$\boxed{4}$ Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)$.

1. Démontrer que f est définie dans $\mathbb{R}$. Préciser son ensemble de continuité.

2. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f et montrer que pour tout x distinct de 1 on a :

$$f'(x) = \frac{1-x}{|1-x|(1+x^2)}.$$

Donner le tableau de variation de f et donner l'allure du graphique de f.

3. Donner une écriture simplifiée de f en utilisant la fonction arctangente.

$\boxed{5}$ Soient les fonctions f et g définies sur $I =]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} \text{ et } g(x) = \frac{x^3}{6(x+1)(x+2)}.$$

1. Etudier les variations de f et donner le tableau de variation de f avec les limites aux bornes.

2. Calculer et simplifier, pour $x \in I$, $g'(x)$ et $g'(x) - f'(x)$.
En déduire le signe de $g(x) - f(x)$ pour $x \in I$.

3. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$.
Pour $n \geq 1$ simplifier $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire que

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Soit (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$.
Pour $n \geq 1$ simplifier $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et en déduire que pour $n \geq 1$ on a :

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

5. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit λ leur limite commune

6. Donner un équivalent de $n!$ en fonction de λ, puis calculer la limite de la suite $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

$\boxed{6}$ Soit la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$ et C_f son graphique dans un repère ortonormé.

1. Etudier l'ensemble de définition et de continuité de f.

2. Etudier l'ensemble de dérivabilité de f et calculer f' (on détaillera les calculs et on donnera une expression simplifiée de $f'(x)$). Que peut-on dire du point de C_f d'abscisse 0 ?

3. Donner le tableau de variation de f et l'allure du graphique de f.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-1)\, e^{\frac{x}{x-1}}$.

Etudier la variations de f ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Préciser si on peut prolonger f par continuité en $x = 1$.

Montrer que $f(x) - ex$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

(On écrira $f(x) = ex(\ldots) - e^{\frac{x}{x-1}}$ et utiliser un équivalent pour trouver la limite du premier terme).

Que peut-on en déduire pour le graphique de f ?

Tracer le graphique de f.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}.$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

On notera encore f la fonction ainsi prolongée.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0. Que peut en déduire sur le graphique de f en 0 ?

3. Etudier l'ensemble de dérivabilité de f et montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{1/x} + 1$.

Etudier les variations de la fonction φ et en déduire celles de f.

4. Montrer que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Que peut en déduire sur le graphique de f ?

5. Tracer le graphique de f.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Etudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(x + 2 - \frac{1}{x}\right) \arctan x.$$

On étudiera en particulier l'ensemble de continuité et de dérivabilité, les prolongements possibles par continuité et dérivabilité de f, et l'existence d'asymptotes obliques et leur position par rapport au graphique de f (on écrira $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} g(x)$ sur un ensemble convenable et on étudiera les variation de g).

Tracer le graphique de f.

Correction :

$\boxed{\mathbf{1}}$ **1.** Posons $h = \frac{1}{x}$. On a $h \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) = \frac{1}{h^2} \arctan\left(\frac{1}{1+1/h}\right) = \frac{1}{h^2} \arctan\left(\frac{h}{1+h}\right) = \varphi(h)$.

Comme on veut obtenir un développement limité généralisé de φ jusqu'en $o(h)$ on effectue un dl de $\arctan\left(\frac{h}{1+h}\right)$ à l'ordre 3. On a $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + o(h^2)$ donc $\frac{h}{1+h} = h - h^2 + h^3 + o(h^3)$, puis $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \ldots$ avec $u = h - h^2 + h^3 + o(h^3)$.

On a $u^2 = h^2 - 2h^3 + o(h^3)$, $u^3 = h^3 + o(h^3)$, donc $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(h^3) = h - h^2 + h^3 - \frac{h^3}{3} + o(h^3)$, soit $\arctan(u) = h - h^2 + \frac{2h^3}{3} + o(h^3)$.

On a donc $\varphi(h) = \frac{1}{h} - 1 + \frac{2h}{3} + o(h)$ et en revenant à x : $\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$.

On en déduit qu'au voisinage de $\pm\infty$ la courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$. Au voisinage de $+\infty$ (C) est au dessus de l'asymptote et en dessous au voisinage de $-\infty$.

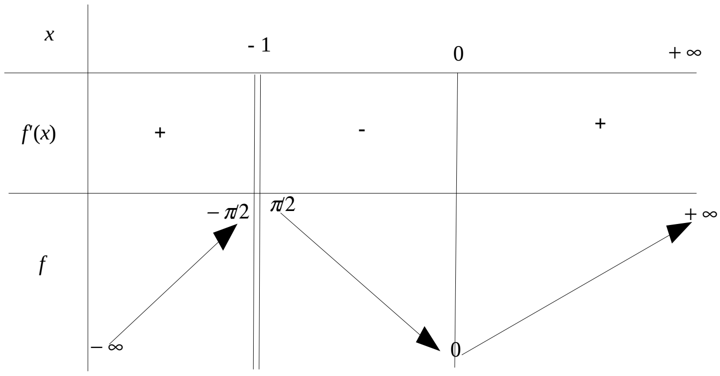
2. La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et est continue et dérivable sur D comme produit et composée de fonctions continues et dérivables.

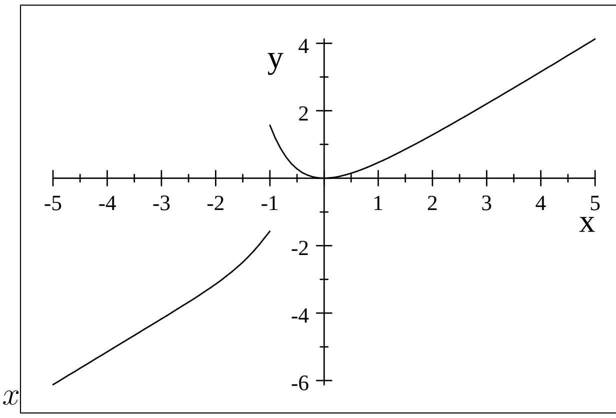
Pour tout x de D on a : $f'(x) = 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) + x^2 . \frac{-1/(1+x)^2}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}$, soit $f'(x) = 2x\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x^2}{x^2+2x+2} = x \times g(x)$ avec $g(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x}{x^2+2x+2}$.

Pour tout x de D on a : $g'(x) = 2\frac{-1/(1+x)^2}{1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2} - \frac{x^2+2x+2-x(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{x^2+4x+6}{(x^2+2x+2)^2}$.

Le trinôme x^2+4x+6 étant toujours strictement positif, on a $g'(x) < 0$ pour tout $x \in D$. Le tableau de variation de g montre que $g(x) < 0$ sur $]-\infty, -1[$ et $g(x) > 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Quand x tend vers -1^+, $\frac{1}{1+x}$ tend vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et de même $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.





x

3. On ne peut pas prolonger f par continuité en -1 car f n'a pas de limite en -1.

Cependant, comme f tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers -1 à droite, on peut prolonger f par continuité à droite en posant $f(-1) = \frac{\pi}{2}$. De plus comme $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = -1-\pi$ ce prolongement est dérivable à droite en -1 et $f_d'(-1) = -1-\pi$.

De même comme f tend vers $-\frac{\pi}{2}$ quand x tend vers -1 à gauche, on peut prolonger f par continuité à gauche en posant $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$. De plus comme $\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = -1+\pi$ ce prolongement est dérivable à droite en -1 et $f_d'(-1) = -1+\pi$.

$\boxed{2}$ $f_k(x) = \frac{\ln^k x}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $f_k(1) = 0$.

1. a. f_k est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$ comme somme et quotient de fonctions continues et dérivables.

Continuité en 1 : en posant $x = 1+h$ on a $h \underset{x\longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$ et $f_k(x) = \frac{\ln^k(1+h)}{h} \underset{0}{\sim} \frac{h^k}{h} = h^{k-1}$ qui tend vers 0 avec h. Comme $f_k(1) = 0$, f_k est continue en 0.

Dérivabilité en 1 : on a $\tau_x = \frac{f_k(x)-f_k(1)}{x-1} = \frac{\ln^k(1+h)}{h^2} \underset{0}{\sim} \frac{h^k}{h^2} = h^{k-2}$. Si $k \geq 3$, h^{k-2} tend vers 0 avec h donc f_k est dérivable en 1 et $f_k'(1) = 0$ et si $k = 2$, f_2 est aussi dérivable en 1 et $f_2'(1) = 1$.

b. La fonction φ_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_k'(x) = k - \ln x - 1$. On a : $\varphi_k'(x) \geq 0$ ssi $\ln x \leq k-1$ ssi $\leq e^{k-1}$.

Limite en $+\infty$: on écrit $\varphi_k(x) = x(k - \ln x) - k \underset{x\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

On en déduit le tableau de variation de φ_k.

Sur l'intervalle $\left[e^{k-1}, +\infty\right[$ φ_k est continue et strictement décroissante : c'est une bijection de $\left[e^{k-1}, +\infty\right[$ dans $\left[e^{k-1}-k, +\infty\right[$. Comme $0 \in \left[e^{k-1}-k, +\infty\right[$ l'équation $\varphi_k(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $\left[e^{k-1}, +\infty\right[$.

Sur l'intervalle $\left]0, e^{k-1}\right]$ on voit de même que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ a une unique solution et cette solution est 1 (car $\varphi_k(1) = 0$).

c. Pour $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ on a $f_k'(x) = \frac{\ln^{k-1} x\,[k(x-1) - x\ln x]}{x(x-1)^2}$ du signe de $\ln^{k-1} x \times \varphi_k(x)$. On en déduit le tableau de variation de f_k suivant les valeurs de k.

2.a. On a pour $k \geq 2$, $\varphi_k\left(e^{k-1}\right) = e^{k-1} - k > 0$ et $\varphi_k\left(e^k\right) = k\left(e^k - 1\right) - ke^k = -k < 0$ donc on a $\boxed{e^{k-1} \leq a_k \leq e^k}$ pour tout $k \geq 2$.

b. En posant $a_k = e^k\left(1+\delta_k\right)$ on a $\varphi_k(e^k\left(1+\delta_k\right)) = 0$ soit $k\left[e^k\left(1+\delta_k\right) - 1\right] - e^k\left(1+\delta_k\right)\ln e^k\left(1+\delta_k\right) = 0$ ou $-k = e^k\left(1+\delta_k\right)\ln\left(1+\delta_k\right)$. On a donc $\boxed{-ke^{-k} = \left(1+\delta_k\right)\ln\left(1+\delta_k\right)}$ pour $k \geq 2$.

On en déduit, en prenant la valeur absolue, $ke^{-k} = \left|1+\delta_k\right| . \left|\ln\left(1+\delta_k\right)\right|$. D'autre part, comme on a $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$, alors $e^{k-1} \leq e^k\left(1+\delta_k\right) \leq e^k$ soit $e^{-1} \leq \left(1+\delta_k\right) \leq 1$. On a déduit que $ke^{-k} \geq e^{-1}\left|\ln\left(1+\delta_k\right)\right|$, soit $\boxed{ke^{1-k} \geq \left|\ln\left(1+\delta_k\right)\right|}$ pour $k \geq 2$.

Quand k tend vers $+\infty$, on a $ke^{1-k} = \frac{ek}{e^k}$ tend vers 0 donc d'après l'inégalité précédente et le théorème de l'étau, $\left|\ln\left(1+\delta_k\right)\right| \longrightarrow 0$, soit $\boxed{\delta_k \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0}$.

c. Comme $\delta_k \longrightarrow 0$ on a $\ln\left(1+\delta_k\right) \sim \delta_k$ donc $\left(1+\delta_k\right)\ln\left(1+\delta_k\right) \sim \delta_k$ soit, d'après la question précédente, $-ke^{-k} \sim \delta_k$.

Il existe donc une suite $\left(\varepsilon_n\right)$ tendant vers 0 telle que $\delta_k = -ke^{-k}\left(1+\varepsilon_n\right)$. On a alors, pour $k \geq 2$, $a_k = e^k\left(1+\delta_k\right) = e^k\left(1 - ke^{-k}\left(1+\varepsilon_n\right)\right)$ soit $a_k = e^k - k - k\varepsilon_n$ ou $\boxed{a_k = e^k - k + \circ\left(k\right)}$.

3. Etude d'une valeur approchée de $\mathbf{a_2}$

a. D'après 2. a. on a $a_2 \in \left[e, e^2\right]$ et vérifie : $2\left(a_2 - 1\right) - a_2\ln a_2 = 0$, soit $a_2 = \frac{2(a_2-1)}{\ln a_2}$.

a_2 est donc solution de l'équation $g\left(x\right) = x$ avec $g\left(x\right) = \frac{2(x-1)}{\ln x}$.

b. La fonction g' étant décroissante sur $I = \left[e; e^2\right]$ on a $g'\left(e^2\right) \leq g'\left(x\right) \leq g'\left(e\right)$ pour tout x de I.

Comme $g'\left(x\right) = \frac{2\ln x - 2(1-1/x)}{\ln^2 x}$ on a $g'\left(e\right) = \frac{2}{e} < 10$ et $g'\left(e^2\right) = \frac{e^2+1}{2e^2} > 0$.

On a donc : $\forall x \in I, 0 \leq g'\left(x\right) \leq k$ avec $k = \frac{2}{e} \in [0; 1[$.

c. Pour tout entier naturel n et tout réel de I on a : $\left|g\left(x\right) - g\left(a_2\right)\right| \leq k\left|x - a_2\right|$ d'après l'inégalité des accroissements finis (appliqué à la fonction g dérivable sur I, sur l'intervalle $\left[x, a_2\right] \subset I$).

En remplaçant x par x_n il vient $\left|g\left(x_n\right) - g\left(a_2\right)\right| \leq k\left|x_n - a_2\right|$ (on vérifie par récurrence que $x_n \in I$ pour tout entier naturel n), soit $\left|x_{n+1} - a_2\right| \leq k\left|x_n - a_2\right|$. Par récurrence (ou par "cascades") on en déduit que pour tout entier naturel n on a : $\left|x_n - a_2\right| \leq k^n\left|x_0 - a_2\right|$. Comme $k^n \longrightarrow 0$ (car $k \in [0; 1[$) il en résulte, par le théorème de l'étau que $\left|x_n - a_2\right| \longrightarrow 0$, soit $\boxed{\lim x_n = a_2}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ La fonction f est définie pour $x \neq 0$ et $x\left(x+2\right) \geq 0$ soit $x \in D = \left]-\infty, -2\right] \cup \left]0, +\infty\right[$.

f est continue sur D comme produit et composée de fonctions continues.

Comme la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable pour $x\left(x+2\right) > 0$ soit $x \in D' = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.

Limite en 0^+: posons $X = \frac{1}{x} \underset{x\rightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. On a $f\left(x\right) = e^X\sqrt{\frac{1}{X}\left(\frac{1}{X}+2\right)} = \frac{e^X}{X}\sqrt{2X+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}e^X}{\sqrt{X}}$ qui tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$.

Pour $x \in D'$ on $f'\left(x\right) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}\sqrt{x\left(x+2\right)} + e^{1/x}\frac{2x+2}{2\sqrt{x(x+2)}} = \frac{e^{1/x}\left(x^2-2\right)}{x\sqrt{x(x+2)}}$.

Dérivabilité en -2^- : quand x tend vers -2^- on a $f'\left(x\right) \longrightarrow -\infty$ donc, d'après le théorème "limite-dérivée", f n'est pas dérivable en -2 et le graphique de f admet au point d'abscisse -2 une demi-tangente verticale.

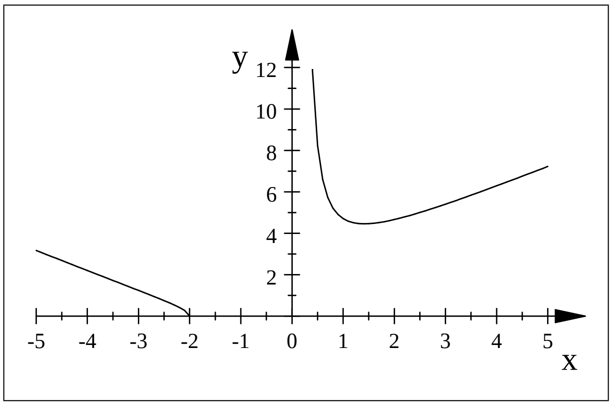
Etude des branches infinies : quand x tend vers $\pm\infty$, f tend vers $+\infty$.

Posons $X = \frac{1}{x} \underset{x\rightarrow\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. On a $f\left(x\right) = e^X\sqrt{\frac{2X+1}{X^2}} = \frac{e^X\sqrt{1+2X}}{|X|}$.

On a $\sqrt{1+2X} = 1 + X - \frac{1}{8}\left(2X\right)^2 + o\left(X^2\right) = 1 + X - \frac{X^2}{2} + o\left(X^2\right)$ et $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o\left(X^2\right)$ d'où $e^X\sqrt{1+2X} = 1 + 2X + X^2 + o\left(X^2\right)$.

Au voisinage de $+\infty$ on a donc $f(x) = \frac{1}{X} + 2 + X + o(X)$ soit $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Le graphique C_f de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x + 2$ et C_f est au dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de $-\infty$ on a $f(x) = -\frac{1}{X} - 2 - X + o(X) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Le graphique C_f de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = -x - 2$ et C_f est au dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.



4 **1.** $f(x)$ est définie $\iff -1 \leq \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \leq 1 \iff \left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)^2 \leq 1$

$\iff (x+1)^2 \leq 2(x^2+1) \iff (x-1)^2 \geq 0$ ce qui est vrai pour tout réel.

L'ensemble de définition de f est donc égal à $\mathbb{R}$.

La fonction arcsin étant continue sur $[-1, 1]$ la fonction f est continue sur D comme quotient et composées de fonctions continues.

2. La fonction arcsin étant dérivable sur $]-1, 1[$ la fonction f est dérivable si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $-1 \leq \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \leq 1$ ce qui équivaut à $(x-1)^2 > 0$ (calcul précédent) soit $x \neq 1$.

La fonction f est donc dérivable sur $D' = \mathbb{R} - \{1\}$. Sur cet ensemble on a :

$$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \text{ avec } u = \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}.$$

Or $u'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2}(x^2+1)^{3/2}}$, soit $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2}(x^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}}} = \frac{1-x}{\sqrt{2}(x^2+1)^{3/2}\sqrt{\frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}}}$, soit

$$\forall x \in D', f'(x) = \frac{1-x}{|1-x|(1+x^2)}.$$

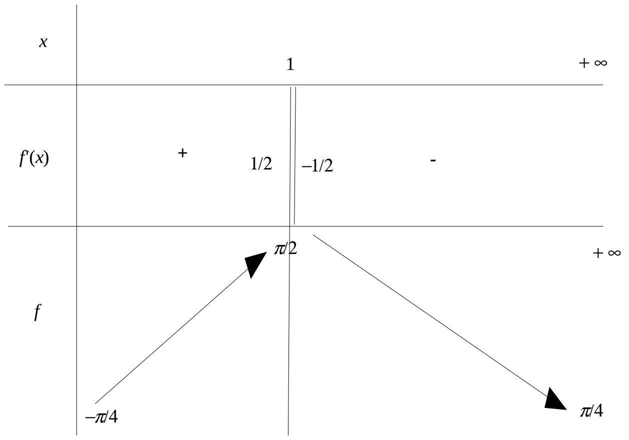
Dérivabilité en 1 : de la formule précédente il résule que $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1/2$ et $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1/2$. La fonction f n'est donc pas dérivable en 1 (théorème "limite-dérivé"). Elle est cependant dérivable à gauche et à droite en 1 et $f_d'(1) = -1/2$ et $f_g'(1) = 1/2$, donc le graphique de f admet au point d'abcisse 1 deux demi-tangentes à droite et à gauche de pentes 1/2 et 1/2 (c'est donc un point anguleux).

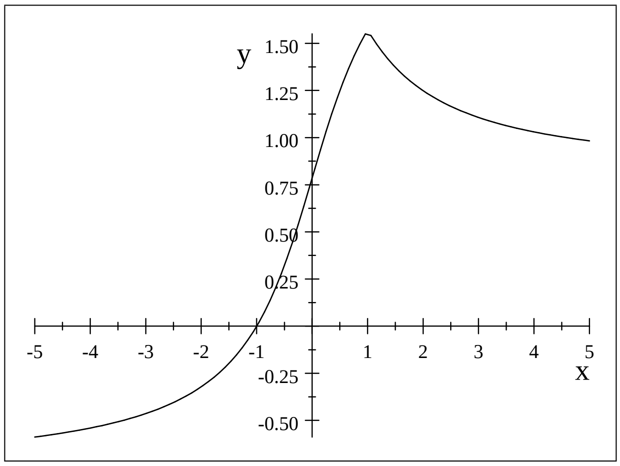
L'ensemble de dérivabilité de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3. Pour $x > 1$ on a $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = (-\arctan x)'$. Il existe donc une constante réelle C telle que :$\forall x > 1, f(x) = -\arctan x + C$. Si on fait tendre x vers $+\infty$ on obtient : $\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + C$ soit $C = \frac{3\pi}{4}$.

On a donc : $\boxed{\forall x > 1, f(x) = \frac{3\pi}{4} - \arctan x}$ (formule valable aussi si $x = 1$).

De même on obtient : $\boxed{\forall x \leq 1, f(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan x.}$



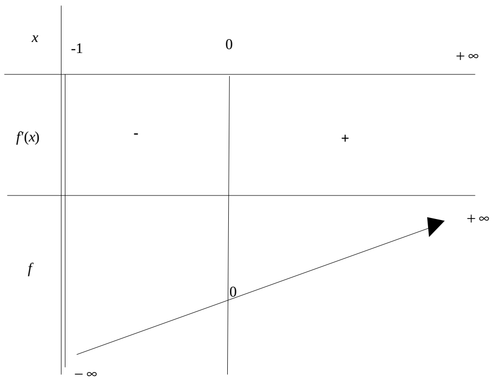


5 **1.** f est dérivable sur I (somme et composées de fonctions dérivables) et :

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}.$$

On a donc $f'(x) \geq 0$ sur I donc f est croissante sur I. Comme $f(0) = 0$, $f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \leq 0$ sur $]-1, 0]$.

On a $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (car $\ln(1+x)$ tend vers $+\infty$ et $\frac{2x}{2+x}$ vers 2).



2. Pour $x \in I$ on a de même : $g'(x) = \frac{x^2(6+6x+x^2)}{6(1+x)^2(2+x)^2}$ (après calculs !). On donc, pour $x \in I$: $g'(x) - f(x) = \frac{x^2(6+6x+x^2)}{6(1+x)^2(2+x)^2} - \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{x^2(6+6x+x^2) - 6x^2(1+x)}{6(1+x)^2(2+x)^2}$ soit $\boxed{g'(x) - f'(x) = \frac{x^4}{6(1+x)^2(2+x)^2}}$.

On a donc $g'(x) - f'(x) \geq 0$ sur I donc $g - f$ est croissante sur I. De plus on a $g(0) - f(0) = 0$ donc on a $\boxed{g(x) - f(x) \leq 0 \text{ sur }]-1, 0] \text{ et } g(x) - f(x) \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}$.

On a donc : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln u_{n+1} - \ln u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1/2}\right]$, soit $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{2/n}{2+1/n}\right] = \left(n + \frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}{e^{\frac{1}{12n}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1} e^{\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}}$, donc $\ln(v_{n+1}) -$

$\ln(v_n) = [\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)] + \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n} = \left(n+\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}$, soit

$$\begin{aligned}
\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{12(n+1)(n+1/2)} - \frac{1}{12n(n+1/2)}\right] \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6(n+1)(2n+1)} - \frac{1}{6n(2n+1)}\right] \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6n(n+1)(2n+1)}\right] \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1/n^3}{6(1+1/n)(2+1/n)}\right],
\end{aligned}$$

soit $\boxed{\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right]}$.

D'après 1/ $f-g$ est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc la suite $\ln(v_n)$ est décroissante, donc (v_n) aussi.

De même $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \left(n+\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{1}{n}\right)$ et d'après 1/ f est positive sur $\mathbb{R}_+$ (car f est croissante sur I et $f(0)=0$) donc $\ln(u_n)$ est croissante, donc (u_n) aussi.

D'autre part on a $u_n \leq v_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (car $e^{\frac{1}{12n}} > 1$) donc on a l'encadrement : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 et (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc ces deux suites sont convergentes. Soient λ et λ' leurs limites respectives.Comme $v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$ et que $e^{\frac{1}{12n}} \longrightarrow 1$ alors $\lambda = \lambda'$.

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

6. On a donc : $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \longrightarrow \lambda$ soit $\frac{\lambda n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \longrightarrow 1$ donc $\lambda n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ ou encore $\boxed{n! \sim \frac{1}{\lambda}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$.

Il existe donc une suite (δ_n) telle que $\delta_n \longrightarrow 1$ et $n! \sim \frac{1}{\lambda}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\,\delta_n$. D'où : $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{\delta_n}{\lambda}}\,n^{\frac{1}{2n}}e^{-1}$.

Or $\sqrt[n]{\frac{\delta_n}{\lambda}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\delta_n}{\lambda}\right)}$ et $n^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{1}{2n}\ln n}$ tendent vers 1 (car les suites $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\delta_n}{\lambda}\right)$ et $\frac{1}{2n}\ln n$ tendent vers 0) donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}}$.

6 **1.** Pour tout réel x on a $1+x^2 \geq 1$, donc $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. Comme la fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Par composition f est continue sur $\mathbb{R}$ (arcsin étant continue sur $[-1,1]$).

2. arcsin étant dérivable sur $]-1,1[$, f est dérivable en x si $-1 < \frac{1}{1+x^2} < 1$, soit si $x \neq 0$, par composition de fonctions dérivables.

Pour $x \neq 0$ on a : $f'(x) = \frac{-\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-1}{(1+x^2)^2}}} = -\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2-1}}$, soit $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)\sqrt{x^2(x^2+2)}} = \frac{-2x}{|x|(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$.

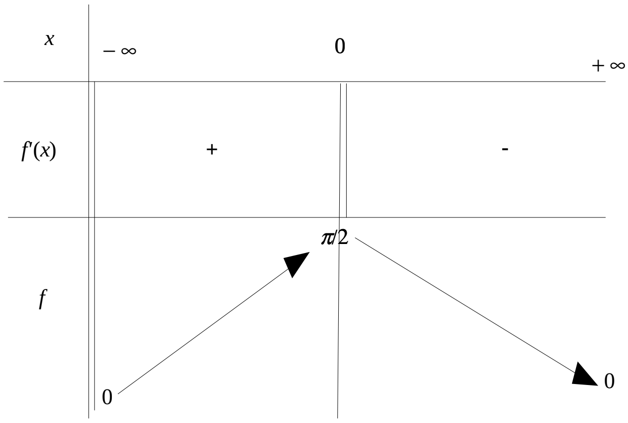
Dérivabilité en 0 : si $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{-2}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

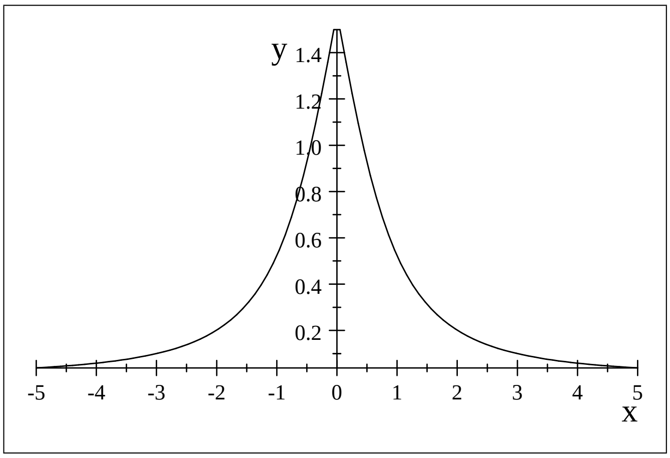
Si $x < 0$ on a $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$ donc $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \sqrt{2}$.

D'après le théorème "limit-dérivée", f n'est pas dérivable en 0. Cependant f est dérivables à droites et à gauche en 0 et $f'_d(x) = -\sqrt{2}$ et $f'_g(x) = \sqrt{2}$.

Interprétation graphique : le graphique de f présente en 0 deux demi-tangentes de pentes $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, donc le graphique de f présente en $x=0$ un point aguleux.

3. La fonction f est paire, donc il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. D'après 2/ on a $f'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.





$\boxed{7}$ La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et elle y est continue et dérivable (comme produit et composée de fonctions continues et dérivables).

Pour tout x de D on a : $f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}} + (x-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)' e^{\frac{x}{x-1}}$, avec $\left(\frac{x}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ donc $f'(x) = e^{\frac{x}{x-1}}\left[1 - \frac{1}{x-1}\right]) = \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}}$, du signe de $\frac{x-2}{x-1}$.

Limites aux bornes de D : quand x tend vers $+$ ou $-$ l'infini on a $\frac{x}{x-1} \longrightarrow 1$, donc $e^{\frac{x}{x-1}} \longrightarrow e$, d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

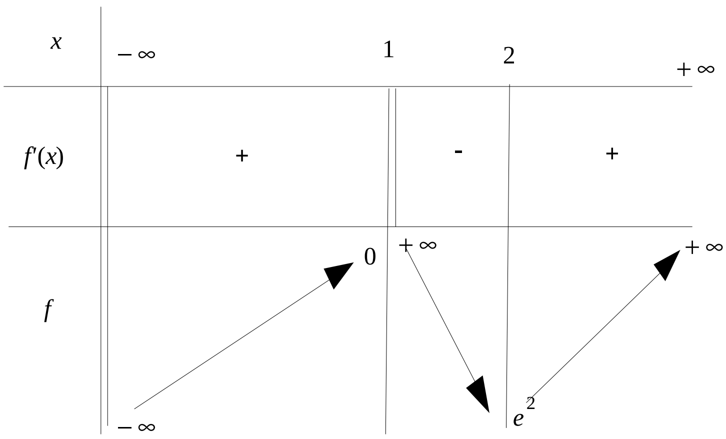
Quand x tend vers 1 à gauche on a : $\frac{x}{x-1} \longrightarrow -\infty$, donc $e^{\frac{x}{x-1}} \longrightarrow 0$ (composée de limites), donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$.

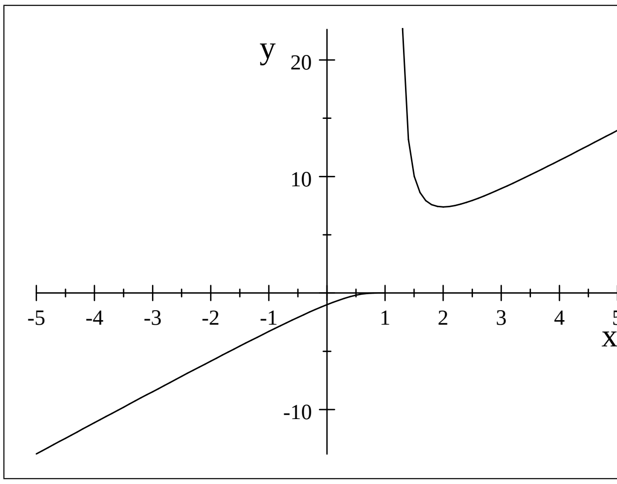
Quand x tend vers 1 à droite : posons $X = \frac{1}{x-1} \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$, et $x = 1 + \frac{1}{X}$. On a donc $f(x) = \frac{1}{X} e^{\left(1+\frac{1}{X}\right)X} = \frac{e^X}{X} \times e$. Comme $\frac{e^X}{X} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

Prolongement par continuité en 1 : on peut seulement prolonger g par continuité à gauche en 1 en posant $f(1) = 0$.

D'autre part, pour $x \in D$, on a : $f(x) - ex = xe^{\frac{x}{x-1}} - ex - e^{\frac{x}{x-1}} = ex\left(e^{\frac{x}{x-1}-1} - 1\right) - e^{\frac{x}{x-1}}$, soit $f(x) - ex = ex\left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right) - e^{\frac{x}{x-1}}$. Quand x tend vers $\pm\infty$ on a $e^{\frac{x}{x-1}} \longrightarrow 0$ donc $e^{\frac{1}{x-1}} - 1 \sim \frac{1}{x-1}$, donc $ex\left(e^{\frac{1}{x-1}} - 1\right) \sim \frac{ex}{x-1} \longrightarrow e$. Comme $e^{\frac{x}{x-1}} \longrightarrow e$ quand x tend vers $\pm\infty$ on a donc $\boxed{f(x) - ex \text{ tend vers 0 quand } x \text{ tend vers } \pm\infty}$.

On en déduit que le graphique de f admet, au voisinage de $\pm\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = ex$.





$\boxed{8}$ **1.** On a $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $e^{1/x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

D'autre part on a $\frac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, donc $e^{1/x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en posant :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

2. Le taux d'accroissement de f en 0 est : $\tau_x = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{1+e^{1/x}}$.

Comme en 1/ on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \tau_x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \tau_x = 1$.

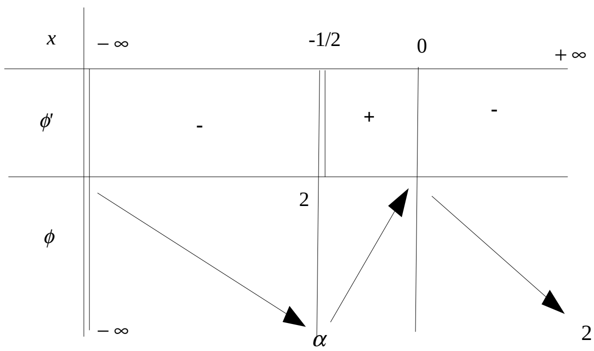
La fonction f n'est donc pas dérivable en 0 mais elle est dérivable à droite et à gauche en 1 avec $f_d'(0) = 0$ et $f_g'(0) = 1$.

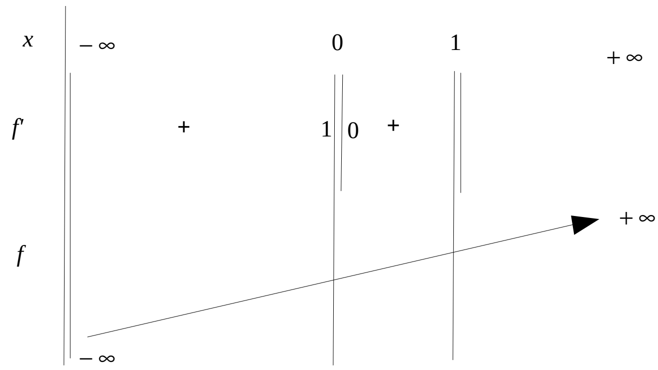
Le graphique de f admet en 0 deux demi-tangentes de pentes 0 à droite et 1 à gauche : le point O est donc un point anguleux.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme, quotient et composée de fonction dérivables et : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1+e^{1/x}-x\left(-\frac{e^{1/x}}{x^2}\right)}{\left(1+e^{1/x}\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{1/x}+1}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}$ du signe de $\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{1/x}+1$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme, produit et composée de fonction dérivables et : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} - \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{1/x} = -\frac{1}{x^2}\left(2+\frac{1}{x}\right)$ du signe de $-\left(2+\frac{1}{x}\right) = -\frac{2x+1}{x}$.

On en déduit le tableau de variation de φ : elle a un minimum sur $\mathbb{R}_-^*$ qui vaut $\alpha = 1-e^{-2} > 0$, donc φ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ et donc f' aussi.





4. Pour $x \neq 0$ on a $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{x}{1+e^{1/x}} - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{2}{1+e^{1/x}} - 1\right)$, soit $f(x) - \frac{x}{2} = -\frac{x}{2}\left(\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}\right)$.

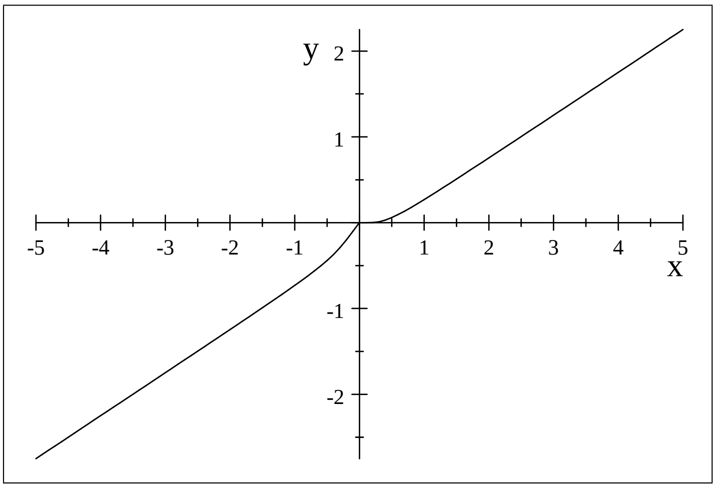
On a $1+e^{1/x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 2$ et $e^{1/x} - 1 \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ (car $\frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$), donc $f(x) - \frac{x}{2} \underset{\pm\infty}{\sim} -\frac{x}{2} \times \frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$.

On a donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, ou $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right) = 0$.

Le graphique de f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ au voisinage de $\pm\infty$.

5. On obtient le graphique suivant

$\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$



$\boxed{\mathbf{9}}$ $f(x) = \left(x+2-\frac{1}{x}\right)\arctan x$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Prolongement en 0 : on a $f(x) = x\arctan x + 2\arctan x - \frac{\arctan x}{x}$. Comme $\arctan x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\arctan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ (car $\arctan x \underset{0}{\sim} x$) on a $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $\widetilde{f}(0) = -1$. On continuera à appeler f la fonction ainsi prolongée.

Pour voir si ce prolongement est dérivable en 0 faisons un dl de f en 0 à l'ordre 1. On a $\arctan x = x + o(x^2)$, donc $\frac{\arctan x}{x} = 1 + o(x)$ d'où $f(x) = -1 + 2x + o(x)$.

f à un dl d'ordre 1 en 0, donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = 2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x + \frac{x+2-\frac{1}{x}}{1+x^2} \\ &= \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)\arctan x + \frac{x^2+2x-1}{x(1+x^2)} \\ &= \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)\left[\arctan x + \frac{x(x^2+2x-1)}{(1+x^2)^2},\right] \end{aligned}$$

soit $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}g(x)$ avec $\boxed{g(x) = \arctan x + \dfrac{x(x^2+2x-1)}{(1+x^2)^2}}$.

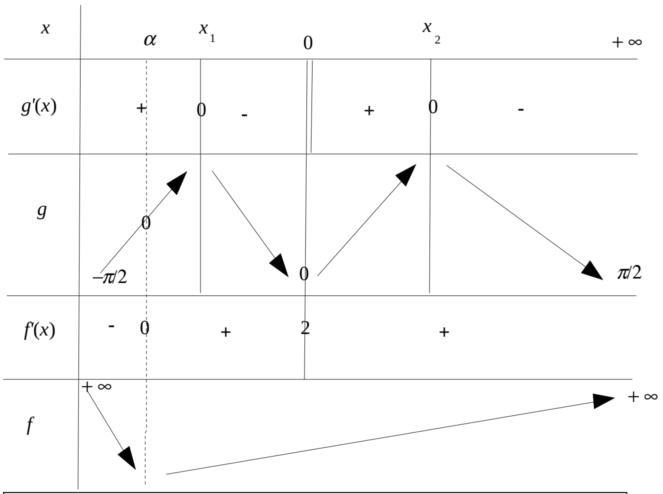
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{(3x^2+4x-1)(1+x^2)^2 - 4x(x^3+2x^2-x)(1+x^{2}}{(1+x^2)^4}$
$4\frac{x}{(x^2+1)^3}(-x^2+2x+1)$, soit :

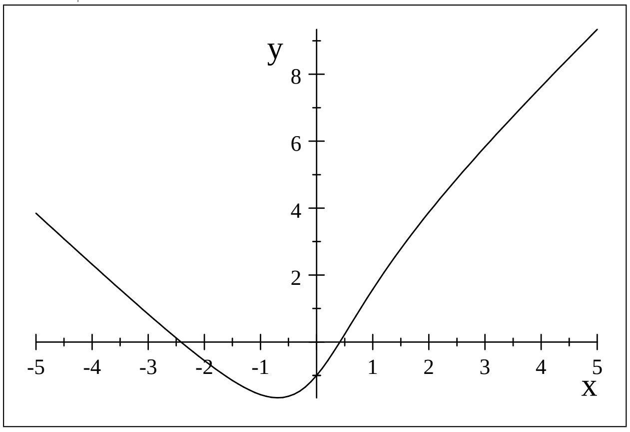
$$g'(x) = \frac{-4x(x^2-2x-1)}{(1+x^2)^3}.$$

$g'(x)$ a donc même signe que $-x(x^2-2x-1)$ et s'annule en 0, $x_1 = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$.

D'après le théorème de la bijection, g s'annule en un unique point $\alpha \in]-\infty, x_1[$.

On obtient le tableau suivant :





Pour étudier les branches infinies on fait un dl de f en $\pm\infty$ en posant $h = \frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. Compte tenu de la relation $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ pour $x > 0$ on a : $f(x) = \left(\frac{1}{h} + 2 - h\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan h\right) = \left(\frac{1+2h-h^2}{h}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan h\right)$. Si on veut un dl jusqu'aux termes en $o(h)$ on effectue un dl de $\arctan x$ à l'ordre 2 : $\arctan x = h + o(h^2)$, d'où $(1+2h-h^2)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan h\right) = (1+2h-h^2)\left(\frac{\pi}{2} - h + o(h^2\right.$
$\frac{\pi}{2} + (\pi - 1)h - \frac{4+\pi}{2}h^2 \; + o(h^2)$, soit, $f(x) = \frac{\pi}{2h} + (\pi - 1) - \frac{4+\pi}{2}h \; + o(h)$ au voisinage de $+\infty$: $\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2}x + (\pi - 1) - \frac{4+\pi}{2x} \; + o\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Le graphique de f admet donc, au voisinage de $+\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = \frac{\pi}{2}x + (\pi - 1)$. Comme $-\frac{4+\pi}{2x} < 0$ pour $x > 0$, le graphique de f est en dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

De même, au voisinage de $-\infty$, on a $\arctan x = -\frac{\pi}{2} - \arctan x$ donc $f(x) = \left(\frac{1}{h} + 2 - h\right)\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan h\right)$
$\left(\frac{1+2h-h^2}{h}\right)\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan h\right) = \frac{1}{h}\left[-\frac{\pi}{2} - (\pi+1)h - \frac{4-\pi}{2}h^2 \; + o(h^2)\right]$.

On obtient $\boxed{f(x) = -\frac{\pi}{2}x - (\pi + 1) - \frac{4-\pi}{2x} \; + o\left(\frac{1}{x}\right)}$ au voisinage de $-\infty$.

Le graphique de f admet donc, au voisinage de $-\infty$, une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{\pi}{2}x - (\pi + 1)$. Comme $-\frac{4-\pi}{2x} > 0$ pour $x < 0$, le graphique de f est au dessus de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.