Le but du problème est d'étudier la fonction F définie par $F(0) = 1$ et, pour tout réel x distinct de 0, par $F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

On note d'autre part r la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $r(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Etude de F sur $\mathbb{R}^*$

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. Démontrer que F est paire.

3. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, xF'(x) = -F(x) + r\left(x^4\right).$$

4. Montrer que : $\forall x > 0, r(x^4) \leq F(x)$. En déduire le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Etude de F au voisinage de 0

5. En remarquant que pour tout t de $[0,1]$ on a $0 \leq t^4 \leq t$,montrer que F est continue en 0.

6. Montrer que le développement limité de F en 0 à l'ordre 4 donné par :

$$F(x) = 1 - \frac{x^4}{10} + o\left(x^4\right).$$

(on détaillera tous les calculs).

7. Montrer que F est dérivable en 0 et calculer $F'(0)$.
Tracer l'allure du graphique de F au voisinage de 0 .

8. Montrer que F' a un développement limité à l'ordre 3 en 0 et déterminer celui-ci.
En déduire que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Etude de F au voisinage de $+\infty$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

9. Montrer que : $\forall x > 0, h\left(\frac{1}{x}\right) = -h(x)$.

10. En déduire pour tous réels x strictement positifs on a :

$$xF(x) + \frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1).$$

(on ne cherchera pas à calculer $F(1)$).

11. Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ que $F(x) \sim \dfrac{2F(1)}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

12. Donner le développement limité généralisé de F au voisinage de $+\infty$ jusqu'au terme en $o(1/x^2)$ (en fonction de $F(1)$).

En déduire que le graphique (C_F) de F possède en $+\infty$ une hyperbole (H) asymptote dont on donnera l'équation. Préciser la position relative de (C_F) et de (H).

13. Donner l'allure du graphique de la fonction F (on donne $F(1) \simeq 0,93$).

<u>*Correction*</u> :

1. La fonction $\varphi : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ $(= r(t^4))$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ existe pour tout réel x et donc F est définie sur $\mathbb{R}^*$. Comme F est définie en 0 elle est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $t > 0$ on a $0 < \sqrt{1+t^4} \leq 1$ donc $0 < \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq 1$ et en intégrant de 0 à x (> 0) on a $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \leq x$ soit $\boxed{0 \leq F(x) \leq 1}$ (en divisant par $x > 0$).

2. Soit $x > 0$. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ on pose $u = -t$ donc $du = -dt$ d'où $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{-x} \frac{-du}{\sqrt{1+(-u)^4}} = -\int_0^{-x} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$ donc $F(x) = \frac{-1}{x}\displaystyle\int_0^{-x} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} = F(x)$.

Conclusion : F est paire.

3. L'application φ étant continue $\Phi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ est la primitive de φ qui s'annule en 0 donc cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc F est de classe $\mathbb{R}^*$ donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

De plus : $\forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) = \left(\frac{\Phi(x)}{x}\right)' = \frac{x\varphi(x) - \Phi(x)}{x^2}$, donc $xF'(x) = \varphi(x) - \frac{\Phi(x)}{x}$ ou :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, xF'(x) = -F(x) + r(x^4)}.$$

4. Pour $x > 0$ et $0 < t \leq x$ on a $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et en intégrant entre 0 et x il vient : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \geq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$. En divisant par x on a donc : $\boxed{\forall x > 0, F(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = r(x^4)}$.

D'après 3/ on a $xF'(x) \leq 0$ pour $x > 0$ donc $F'(x) \leq 0$ pour $x > 0$.

La fonction F est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Pour $t \in [0,1]$ on a $0 \leq t^4 \leq t$ donc $1 \leq \sqrt{1+t^4} \leq \sqrt{1+t}$ soit $\frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq 1$. En intégrant entre 0 et x (avec $0 < x \leq 1$) on obtient : $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \leq x$. Or $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{1+t}\right]_0^x = 2\sqrt{1+x} - 2$, donc, en divisant par x : $2\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \leq F(x) \leq 1$.

De plus $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ (on peut aussi utiliser l'équivalent $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$ ou le dl : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$). D'après le théorème de l'étau on a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 1$.

Comme F est paire on a $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 1$ et comme $F(0) = 1$ alors F est continue en 0.

6. Au voisinage de 0 on a $\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 - \frac{u}{2} + o(u)$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$. En "primitivant" il vient : $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = x - \frac{x^5}{10} + o(x^5)$ et en divisant par x : $\boxed{F(x) = 1 - \frac{x^4}{10} + o(x^4)}$.

7. D'après 6/ F a un dl à l'ordre 4 en 0 donc F a un dl à l'ordre 1 : $F(x) = 1 + 0x + o(x)$. Cela signifie que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Comme $F(x) - 1 = -\frac{x^4}{10} + o(x^4)$ qui est négatif au voisinage de 0 (C_F) est au dessous de sa tangente horizontale d'équation $y = 1$.

8. D'après 3/ on a $xF'(x) = -F(x) + r(x^4) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ On a $-F(x) = -1 + \frac{x^4}{10} + o(x^4)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$ donc $xF'(x) = -\frac{2x^4}{5} + o(x^4)$ donc $\boxed{F'(x) = -\frac{2x^3}{5} + o(x^3)}$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = 0 = F'(0)$ donc F' est continue en 0 et F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Remarque : en ne peut obtenir le dl de F' en dérivant celui de F.

9. Dans l'intégrale $h(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ on pose $u = \frac{1}{t}$, soit $t = \frac{1}{u}$ donc $dt = -\frac{du}{u^2}$. Les bornes

$t=1$ et $t=x$ deviennent $u=1$ et $u=1/x$. Donc $h(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=h(x)=\int_1^{1/x}\frac{-du/u^2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{u}\right)^4}}=$ $-\displaystyle\int_1^{1/x}\frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$ donc $\boxed{\forall x>0, h\left(\frac{1}{x}\right)=-h(x)}$.

10. Pour $x>0$ on a d'après 9/ $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\int_1^{1/x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=0$ et en ajoutant $2F(1)=2\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ aux deux membres on obtient (relation de Chasles) : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\int_0^{1/x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=2F(1)$, soit $\boxed{xF(x)+\frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}\right)=2F(1) \text{ pour } x>0}$.

11. D'après 10/ on a : $F(x)=-\frac{1}{x^2}F\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2F(1)}{x}$; comme $\lim\limits_{h\to 0}F(h)=1$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty}F(1/x)=1$ et $\frac{2F(1)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0}$.

De plus on a $xF(x)=-\frac{1}{x}F\left(\frac{1}{x}\right)+2F(1)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}2F(1)$ donc $\boxed{F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2F(1)}{x}}$.

12. On a $F(h)=1-\frac{h^4}{10}+o(h^4)$ au voisinage de 0, donc, au voisinage de $+\infty$, on a $F(1/x)=1-\frac{1}{10x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$. Comme $F(x)=-\frac{1}{x^2}F\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2F(1)}{x}$ il vient : $F(x)=\frac{2F(1)}{x}-\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Le graphique (C_F) de F possède en $+\infty$ une hyperbole (H) asymptote d'équation $y=\frac{2F(1)}{x}$ et (C_F) est en dessous de (H) au voisinage de $+\infty$.

x	0		$+\infty$
$F'(x)$		- -	
F	1	$\searrow$	0