

G1 Les deux exercices A et B sont indépendants

A Soient deux droites D et D' de l'espace non parallèle passant respectivement par les points A et A' et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit Δ leur perpendiculaire commune. On pose : $\{H\} = D \cap \Delta$ et $\{H'\} = D' \cap \Delta$.

1. Soient M et M' deux points de D et D' respectivement. Montrer que :

$$\overrightarrow{MM'}^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'} \right)^2.$$

En déduire que le minimum des distances MM' est égal à HH' .

Cette distance est appelée *distance de la droite D à la droite D'* et se note $d(D, D')$.

2. Montrer que $\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \overrightarrow{HH'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$.

En déduire que $HH' = \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

3. *Application numérique.* D est la droite passant par le point A de coordonnées $(1, -1, 2)$ et orthogonale au plan d'équation $x + y - 2z = 0$ et D' est la droite d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 3x + z + 3 = 0 \end{cases}$. Calculer $d = d(D, D')$.

B E étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, -1)$, $C(1, 1, 1)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Donner une équation du plan (ABC) et en préciser un vecteur normal.

Soit $D(u, v, w)$ un point de l'espace tel que

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (1)$$

Lorsque la condition (1) est remplie on dit que le tétraèdre $ABCD$ est *orthocentrique*.

3. Ecrire le système linéaire vérifié par (u, v, w) pour que le tétraèdre $ABCD$ soit orthocentrique.

4. Résoudre ce système. Justifier que D décrit une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique et un vecteur directeur de Δ .

5. Déterminer les coordonnées du point P intersection de la droite Δ et du plan (ABC) .

Quel point particulier le point P représente-t-il pour le triangle ABC ?

6. On dit que $ABCD$ est un *vrai tétraèdre* lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

Justifier que $ABCD$ est un vrai tétraèdre sauf pour une position particulière de D que l'on précisera.

7. On suppose désormais que $D(2, -1, 1)$.

a. Le point D appartient-il à Δ ? $ABCD$ est-il un vrai tétraèdre ?

b. On appelle *hauteur du tétraèdre issue d'un sommet* la droite passant par le sommet et orthogonale à la face opposée. Ainsi la hauteur h_A issue de A passe par A et est orthogonale à la face BCD .

Donner une représentation paramétrique des hauteurs h_A et h_D issue de A et de D respectivement.

c. Montrer que h_A et h_D sont concourantes en un point H dont on déterminera les coordonnées.

Corrigé :

A 1. On a $\overrightarrow{MM'}^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'})^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2 + 2\overrightarrow{HH'} \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})$.

Le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est directeur de Δ et $\overrightarrow{MH}$ appartient à la direction de D qui est orthogonale à Δ donc on a $\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$. De même $\overrightarrow{H'M'}$ appartient à la direction de D' donc $\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'M'} = 0$.

On a donc $\overrightarrow{HH'} \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}) = \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{H'M'} = 0$.

On a alors : $\overrightarrow{MM'}^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'})^2$.

Cette relation s'écrit $MM'^2 = HH'^2 + \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\|^2$ donc $MM \geq HH'$ et le minimum des distances MM' est égal à HH' .

2. On a $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AA'} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AH} + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{HH'} + (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{H'A'}$. Or $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ car $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à D et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D ; de même $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{H'A'} = 0$ donc $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AA'} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{HH'}$.

En prenant la valeur absolue des deux membres il vient $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AA'}| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \cdot \|\overrightarrow{HH'}\|$ car les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\overrightarrow{HH'}$ sont colinéaires. On obtient $HH' = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AA'}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AA'})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.

3. Un vecteur directeur de D est un vecteur normal à P : on peut prendre $\vec{u}$ de coordonnées $(1, 1 - 2)$. D'autre part le système $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 3x + z + 3 = 0 \end{cases}$ se résout en prenant (par exemple)

$x = k$ comme paramètre et on obtient des équations paramétriques $\begin{cases} x = k \\ y = -2 - 4k \\ z = -3 - 3k \end{cases}$ de la droite D' donc on prend $\vec{v}$ de coordonnées $(1, -4, -3)$ et $A'(0, -2, -3)$.

On a $\vec{u} \wedge \vec{v}(-11, 1, -5)$ et $\overrightarrow{AA'}(-1, -1, -5)$ soit $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{147}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{AA'} = 35$ d'où $d = \frac{35}{\sqrt{147}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

B 1. On a $\overrightarrow{AB}(2, 1, -1)$ et $\overrightarrow{AC}(1, 1, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2, -3, 1)$ est un vecteur normal du plan (ABC) .

On a : $M(x, y, z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit $(ABC) : 2x - 3y + z = 0$.

3. On a : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -u + 2w$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + u + v + w$ et $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 + 2u + v - w$.

Le tétraèdre $ABCD$ est donc orthocentrique ssi $(S) \begin{cases} -u + 2w = 0 & (L_1) \\ u + v + w = 2 & (L_2) \\ 2u + v - w = 2 & (L_3) \end{cases}$.

4. Par permutations de lignes on a $(S) \iff \begin{cases} 2u + v - w = 2 \\ u + v + w = 2 \\ -u + 2w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2u + v - w = 2 \\ u - 2w = 2 \\ -u + 2w = 0 \end{cases} (L_2 \leftarrow$

$L_2 - L_1)$, qui équivaut à $\begin{cases} 2u + v - w = 2 \\ u - 2w = 0 \end{cases}$. En prenant $w = t$ comme paramètre on obtient

$\begin{cases} u = 2t \\ v = 2 - 3t \\ w = t \end{cases}$.

Ce sont les équations paramétriques de la droite Δ passant par le point de coordonnées $(0, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, -3, 1)$.

5. Les coordonnées (x, y, z) de P sont solution du système $2x - 3y + z = 0, x = 2t, y = 2 - 3t, z = t$. Par substitution il équivaut à $4t - 3(2 - 3t) + t = 0, x = 2t, y = 2 - 3t, z = t$, soit $t = \frac{3}{7}, x = \frac{6}{7}, y = \frac{5}{7}, z = \frac{3}{7}$.

Le point P vérifie $\vec{AP} \cdot \vec{BC} = \vec{BP} \cdot \vec{AC} = \vec{CP} \cdot \vec{AB} = 0$. On a donc $(AP) \perp (BC), (BP) \perp (AC)$ et $(CP) \perp (AB)$. Le point P appartient au trois hauteurs du triangle (ABC) : c'est donc l'orthocentre du triangle (ABC) .

6. $ABCD$ n'est pas un vrai tétraèdre ssi les vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont pas coplanaires, ce qui équivaut à dire que le point D appartient au plan (ABC) , soit $D \in P \cap \Delta$, soit $D = P$.

7. a. Les coordonnées de D vérifie les équations paramétriques de Δ (avec $t = 1$) donc $D \in \Delta$.

On a $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 2 \times 2 + 3 \times 1 + (-1)^2 = 8 \neq 0$. les vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}$ et $\vec{AD}$ ne sont donc pas coplanaires, donc $ABCD$ est un vrai tétraèdre.

b. Un vecteur directeur de h_A est $\vec{BC} \wedge \vec{BD}(4, 2, 2)$, donc des équation paramétrique de h_A sont $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$. De même un vecteur directeur de h_D est $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(2, -3, 1)$, donc des

équation paramétrique de h_D sont $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

c. On cherche l'intersection de h_A et h_D en résolvant le système $\begin{cases} x = 4t = 2 + 2t' \\ y = 2t = -1 - 3t' \\ z = 2t = 1 + t' \end{cases}$.

On obtient $t = 1/4$ et $t' = -1/2$, donc h_A et h_D se coupent au point $H(1, 1/2, 1/2)$.