

Distance d'un point à un plan

Soient D une droite et P un plan de l'espace.

On appelle distance de la droite D au plan P la plus petite distance d'un point de D à un point de P et on la note d .

1. Quelle est la valeur de d si $D \subset P$ ou si D et P sont sécants ?

On se place dans la suite dans le cas où D est parallèle à P et non contenue dans P .

Soit A un point de D et H son projeté orthogonal sur P .

2. Montrer que la distance AH ne dépend pas du point A de la droite D et que $d = AH$.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de D et $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthogonale de la direction de P .

3. Soit B un point du plan P .

a. Montrer que $(\vec{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{AH} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$.

b. En déduire que $d = \frac{|(\vec{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

4. *Application numérique* : dans un repère orthonormé de l'espace D est la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$ et P le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$. Vérifier que D est parallèle à P et que D n'est pas incluse dans P et calculer la distance d de D à P .

Correction :

1. Si $D \subset P$ ou si D et P sont sécants il existe un point A appartenant à $D \cap P$, donc, par définition de d , $d \leq AA = 0$ donc $\boxed{d = 0}$.

2. Soit A' un autre point de D et H' son projeté orthogonal sur P .

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{n}$ un vecteur normal de P soit le plan Π passant par A de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$. On a $D \subset \Pi$ donc A et A' appartiennent à Π . D'autre part les vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{A'H'}$ sont colinéaires à $\vec{n}$ donc les points H et H' appartiennent aussi à Π . Les points A, A', H et H' sont donc coplanaires.

Dans le plan Π la quadrilatère $AA'H'H$ est un parallélogramme car $(AA') \parallel (HH')$ et $(AH) \parallel (A'H')$ donc $AH = A'H'$.

Conclusion : $d = AH$ ne dépend pas du point A de la droite D .

Si A est un point quelconque de D et si M est un point de P , le triangle AMH est rectangle en H donc $AM \geq AH$, donc la distance de D à P est égale à $d = AH$.

3. a. On écrit $\vec{AB} \wedge \vec{u} = (\vec{AH} + \vec{HB}) \wedge \vec{u} = \vec{AH} \wedge \vec{u} + \vec{HB} \wedge \vec{u}$.

On a donc $(\vec{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{AH} \wedge \vec{u} + \vec{HB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{AH} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} + (\vec{HB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$.

Or les vecteurs $\vec{HB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires (car H et B appartiennent au plan P) donc leur produit mixte $(\vec{HB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$ est nul, d'où $(\vec{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\vec{AH} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$.

On a donc $|(\vec{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}| = |(\vec{AH} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}|$.

Le vecteur $\vec{AH} \wedge \vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ donc $|(\vec{AH} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}| = \|\vec{AH} \wedge \vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ et $\|\vec{AH} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{AH}\| \times \|\vec{u}\|$ car $\vec{AH}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

On a donc $|(\vec{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}| = \|\vec{AH}\| \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, soit $\boxed{d = AH = \frac{|(\vec{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}}$.

4. D est la droite passant par le point A de coordonnées $(1, -2, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, 1, -3)$ et P est le plan de vecteur normal $\vec{n}(1, 1, 1)$. Comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ la droite D est parallèle à P . D'autre part $A \notin P$ donc D n'est pas incluse dans P .

Pour appliquer la formule précédente on trouve un vecteur $\vec{v}$ dans la direction de P et orthogonal à $\vec{u}$: on peut prendre $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; on prend par exemple

$B(1, 1, 1) \in P$.

On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{42}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}(-10, 2, -3)$ et $(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = -56$, d'où $d = \frac{56}{\sqrt{14} \times \sqrt{42}} = \frac{28}{\sqrt{147}}$.