Dans l'espace on considère deux droites D_1 et D_2 et un point A n'appartenant ni à D_1 ni à D_2.

On s'interesse au problème suivant : existe-t'il une droite Δ passant par A et sécantes avec les droites D_1 et D_2 ?.

1. Répondre à la question dans le cas où les droites D_1 et D_2 sont parallèles ou sécantes et préciser le nombre de solutions du problème.

Dans la suite on suppose que les droites D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

On procède par analyse-synthèse : on suppose donc qu'il existe une telle droite Δ.

Soient P_1 le plan passant par A et contenant D_1 et P_2 le plan passant par A et contenant D_2.

2. Montrer que P_1 et P_2 sont sécants.

3. Montrer que $\Delta = P_1 \cap P_2$.

Conclure sur l'existence de Δ et le nombre de solutions du problème.

4. *Application numérique* : soient A le point de coordonnées $(-1, 0, 3)$, D_1 la droite passant par le point B de coordonnées $(1, 1, 2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(-1, 1, 1)$ et D_2 la droite d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 1 \\ x+3y+z & = & 2 \end{array}\right.$.

a. Montrer que les doites D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

b. Donner des vecteurs normaux au plans P_1 et P_2 (définis précedemment).

c. Préciser la droite Δ.

<u>*Correction*</u> :

1. Si les droites D_1 et D_2 sont parallèles ou sécantes elles sont coplanaires et incluses dans un plan P.

Si $A \in P$ il y a dans le plan P une infinité de droites Δ passant par A et sécantes avec D_1 et D_2 (toute droite du plan P passant par A et non parallèle à D_1 et D_2).

Si $A \notin P$ et si les droites D_1 et D_2 sont parallèles la droite Δ n'existe pas.

Si $A \notin P$ et si les droites D_1 et D_2 sont sécantes en H alors il existe une unique droite Δ : c'est la droite (AH).

2. Raisonnons par l'absurde : si les plans P_1 et P_2 n'étaient pas sécants ils seraient parallèles. Comme ils ont le point A en commun ces deux plans seraient égaux et les droites D_1 et D_2 seraient coplanaires ce qui n'est pas.

Conclusion : les plans P_1 et P_2 sont sécants.

3. D'après 2/ les plans P_1 et P_2 sont sécants et comme $\Delta \subset P_1$ et $\Delta \subset P_2$ on a $\Delta = P_1 \cap P_2$.

Synthèse : soit $\Delta = P_1 \cap P_2$. Si Δ n'est pas parallèle à D_1 et à D_2 alors Δ est l'unique solution du problème (Δ est sécante avec D_1 et D_2 car Δ et D_1 sont coplanaires ainsi que Δ et D_2).

Si Δ est pas parallèle à D_1 ou à D_2 alors le problème n'a pas de solution.

4. a. Des équation paramétrique de D_1 sont $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y= & = & 1+t \\ z & = & 2+t \end{array}\right.$. Pour trouver $D_1 \cap D_2$ on résout le système composé de ces 3 équations et des équations $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 1 \\ x+3y+z & = & 2 \end{array}\right.$. En remplaçant x, y, z en fonction de t on obtient $\left\{\begin{array}{rcl} 1-t+1+t+4+2t & = & 1 \\ 1-t+3(1+t)+2+t & = & 2 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{rcl} 2t & = & -5 \\ 3t & = & -4 \end{array}\right.$ ce qui est impossible.

On a donc $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ i.e. les doites D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

b. Un vecteur normal à P_1 est $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{n_1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a $\left\{ \begin{array}{lcl} x+y+2z & = & 1 \\ x+3y+z & = & 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x+y+2z & = & 1 \\ 2y-z & = & 1 \end{array} \right.$. En prenant $y = t$ pour paramètrer on obtient des équations paramétriques de D_2 : $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3-5t \\ y & = & t \\ z & = & -1+2t \end{array} \right.$ donc le point C de coordonnées $(3, 0, -1)$ appartient à D_2 et $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D_2.

Un vecteur normal à P_2 est $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$, ou $\overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. Il résulte de ce qui précède que Δ est la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$.