Dans le plan P soit un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = AC = 4d$ et $BC = 2d$ (d réel > 0).

Soit G_λ le barycentre du système $(A,\lambda),(B,1),(C,1)$.

1. Soit O le milieu de $[BC]$. Montrer que $\forall\lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}, \overrightarrow{OG_\lambda} = \dfrac{\lambda}{\lambda+2}\overrightarrow{OA}$.

En déduire l'ensemble des points G_λ quant λ parcourt $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Soit $G = G_{-1}$.

2. Montrer que O est le milieu de $[AG]$ et construire G.

3. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) . \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0.$$

4. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$.

5. Déterminer et tracer l'ensemble Γ des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -32d^2$ (on notera que Γ passe par un point connu).

Correction :

1. G_λ existe pour $\lambda \neq -2$ et alors, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MG_\lambda} = \frac{\lambda\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{\lambda+2}$. En prenant $M = O =$ milieu de $[BC]$ on a $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{OG_\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda+2}\overrightarrow{OA}$.

Une rapide étude de la fonction $\lambda \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda+2}$ montre que quand λ parcourt $\mathbb{R} - \{-2\}$, $\frac{\lambda}{\lambda+2}$ parcourt $\mathbb{R} - \{1\}$. L'ensemble des points G_λ quant λ parcourt $\mathbb{R} - \{-2\}$ est donc la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{OA}$ privée du point A i.e. $(OA) - \{A\}$.

2. On a, d'après la relation du 1/, $\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OA}$ donc O est le milieu de $[AG]$.

3. Pour tout point M du plan on a : $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$. On a donc : $\left(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) . \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} .2\overrightarrow{MO} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} .\overrightarrow{MO} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} \perp \overrightarrow{MO}$. Cela équivaut à dire que M appartient au cercle de diamètre $[OG]$.

4. Pour tout point M du plan on a $MA^2 - MB^2 - MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$

$= -\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}\right) + \overrightarrow{GA}^2 - \overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{GC}^2$. Comme $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ on obtient :

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -MG^2 + GA^2 - GB^2 - GC^2.$$

De plus : $GB = GC = AB = 4d$ et $GA^2 = (2OA)^2 = 4 \times 15d^2 = 60d^2$.

On a donc : $MA^2 - MB^2 - MC^2 = O \Longleftrightarrow -MG^2 + 60d^2 - 32d^2 = 0 \Longleftrightarrow MG^2 = 28d^2 \Longleftrightarrow MG = 2\sqrt{7}d$.

L'ensemble des points cherché est le cercle de centre G de rayon $2\sqrt{7}d$.

5. Comme $AB = AC = 4d$ on remarque que A appartient à l'ensemble Γ. On a, pour tout point M du plan : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = -AB^2 - AC^2 - 2\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -32d^2 - 2\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -32d^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AG}$ (car $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$).

On a donc : $M \in \Gamma \Longleftrightarrow -32d^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AG} = -32d^2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AG} = 0$. Γ est donc la droite passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{AG}$.