Exercices Géométrie

$\boxed{1}$ **1.** Rappeler la nature de la composée $r_{A,\alpha} \circ r_{B,\beta}$ de deux rotations $r_{A,\alpha}$ et $r_{B,\beta}$ d'angles α et β et de centre A et B et de $s_D \circ s_{D'}$ composée de deux symétries orthogonales s_D et $s_{D'}$ d'axes D et D'.

On rappelle que l'image d'un demi-droite d'origine A par une application affine f est une demi-droite d'origine $A' = f(A)$.

Dans la suite ABC est un triangle direct (i.e. l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ est direct), I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, N est l'image de C par la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P est l'image de A par la rotation de centre K de d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $KP = IJ$.

2. Montrer qu'il existe une rotation r qui transforme K en J et P en I. Préciser son angle.

3. Quelle est l'image de la demi-droite $[KI)$ par r ? En déduire l'image de I par r, puis que le triangle PIN est rectangle et isocèle en I.

Dans la suite on veut redémontrer ce dernier résultat d'une autre façon.

On considère r_1 la rotation de centre P de d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4. Quelle est la nature de $r_2 \circ r_1$? Quelle est l'image de B par $r_2 \circ r_1$?

En déduire le centre de $r_2 \circ r_1$.

5. Trouver trois droites Δ, Δ' et D telles que $r_2 = s_{\Delta'} \circ s_D$ et $r_1 = s_D \circ s_\Delta$ (s_D désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite D).

Retrouver le résultat de la question 3/.

$\boxed{2}$ Soit E une espace affine dont la direction $\overrightarrow{E}$ est de dimension finie.

Question préliminaire : quelle est l'image par une application affine g d'un sous-espace affine $F = A + \overrightarrow{F}$? ($\overrightarrow{F}$ sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$).

On cherche les applications f de E dans E vérifiant la propriété (P) suivante

f est affine et transforme toute droite de E
en une droite parallèle.

Soit f vérifiant cette propriété.

1. Montrer que $\overrightarrow{f}$, application linéaire associée à f, est injective.

En déduire que f est bijective.

2. Montrer que pour tout vecteur x non nul de E il existe un réel λ_x (dépendant de x) tel que

$$\overrightarrow{f}(x) = \lambda_x . x.$$

3. Pour x et y appartenant à $\overrightarrow{E}$ et non nuls, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$. (On distinguera deux cas suivant que le système (x, y) est libre ou non).

4. En déduire qu'il existe un scalaire λ non nul tel que

$$\forall x \in \overrightarrow{E}, \overrightarrow{f}(x) = \lambda x.$$

Quelle est, suivant les valeurs de λ, la nature de l'application f ?

En déduire les applications solution du problème (P).

$\boxed{3}$ Soient deux droites D et D' de l'espace non parallèle passant respectivement par les points A et A' et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Soit Δ leur perpendiculaire commune. On pose : $\{H\} = D \cap \Delta$ et $\{H'\} = D' \cap \Delta$.

1. Soient M et M' deux points de D et D' respectivement. Montrer que :

$$\overrightarrow{MM'}^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right)^2.$$

En déduire que le minimum des distances MM' est égal à HH'.

Cette distance est appelée *distance de la droite* D à la droite D' et se note $d(D, D')$.

2. Montrer que $\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{HH'}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$.

En déduire que $HH' = \dfrac{\left|\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}$.

3. *Application numérique.* D est la droite passant par le point A de coordonnées $(1, -1, 2)$ et orthogonale au plan d'équation $x + y - 2z = 0$ et D' est la droite d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{lcl} x + y - z - 1 & = & 0 \\ 3x + z + 3 & = & 0 \end{array}\right.$. Calculer $d = d(D, D')$.

$\boxed{4}$ Dans le plan P soit ABC un triangle rectangle en A et isocèle tel que $AB = AC = a$

où a est un réel strictement positif. Soit m un paramètre réel.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que pour que le système de points pondérés $\{(A,\ 2),\ (B,\ -1),\ (C,\ m)\}$ admette un barycentre G_m.

2. Construire G_0 puis G_2. Vérifier que $G_0G_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

3. Déterminer et construire les ensembles suivants :

$\Gamma_1 = \ \{M \in\ P\ /\ \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|\}$

$\Gamma_2 = \{M \in\ P\ /\ \left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0\}$

$\Gamma_3 = \{M \in P\ /\ 2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = a^2\}$ (On observera que Γ_3 passe par un point connu).

$\boxed{5}$ Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct on considère la droite D passant par

le point $A\left|\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right.$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan P passant par $B\left|\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right.$ et de vecteurs

directeurs $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une équation cartésienne du plan P.

2. Montrer que $D \subset P$.

Soit D' l'ensemble des points de l'espace de coordonnées (x, y, z) tels que $\left\{\begin{array}{l} x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 1 = 0 \end{array}\right.$.

3. Montrer que D' est une droite orthogonale à P et calculer les coordonnées du point C tel que $\{C\} = P \cap D'$.

4. Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal de C sur D.

En déduire la distance de la droite D à la droite D', égale à la distance CH.

$\boxed{6}$ Soient D une droite et P un plan de l'espace.

On appelle distance de la droite D au plan P la plus petite distance d'une point de D a un point de P et on la note d.

1. Quelle est la valeur de d si $D \subset P$ ou si D et P sont sécants ?

On se place dans la suite dans le cas où D et parallèle à P et non contenue dans P.

Soit A un point de D et H son projeté orthogonal sur P.

2. Montrer que la distance AH ne dépend pas du point A de la droite D et que $d = AH$.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base orthogonale de la direction de P.

3. Soit B un point du plan P.

a. Montrer que $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}$.

b. En déduire que $d = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}\right|}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\|}$.

4. *Application numérique* : dans un repère orthonormé de l'espace D est la droite d'équations paramétriques $\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= -2 + t \\ z &= -3t \end{cases}$ et P le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$. Vérifier que D est parallèle à P et que D n'est pas incluse dans P et calculer la distance d de D à P.

$\boxed{7}$ Soit P le plan affine euclidien.

Questions préliminaires

Soit E un espace affine et f une application affine de E et $\overrightarrow{f}$ son application linéaire associée.

1. Montrer que l'image par f du sous-espace affine $F = A + \overrightarrow{F}$ est $f(F) = f(A) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{F}\right)$.

2. Montrer que f conserve le milieu, c'est à dire que si I est le milieu de $[AB]$ alors $I' = f(I)$ est le milieu de $[A'B']$(avec $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$).

Ensemble des applications affines conservant le cercle unité

Dans la suite P désigne le plan affine euclidien, Γ le cercle de centre O de rayon 1 et f une application affine de P telle que $f(\Gamma) = \Gamma$. Pour $M \in P$ on note $M' = f(M)$ l'image du point M par f.

3. Si f n'est pas bijective que peut-on dire de l'image de P par f ?

En déduire que f est bijective.

4. Soient $[AB]$ un diamètre de Γ. Que peut-on dire des points A', B' et O' ?

Soit $[CD]$ un autre diamètre de Γ. Montrer que les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ ne sont pas parallèles.

En déduire que $f(O) = O$.

5. Montrer que :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{P} \text{ tel que } \|\overrightarrow{x}\| = 1 \text{ on a : } \left\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})\right\| = \|\overrightarrow{x}\|.$$

En déduire que :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{P} : \left\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})\right\| = \|\overrightarrow{x}\|.$$

Que peut-on dire de $\overrightarrow{f}$? de f ?

6. En déduire l'ensemble des applications affines f telles que $f(\Gamma) = \Gamma$.

Correction :

$\boxed{1}$ **1.** I étant le milieu de $[BC]$ et J celui de $[AB]$ alors la droite (IJ) ("droite des milieux" du triangle ABC) est parallèle à (AB) et $\frac{AB}{2} = IJ$. Comme $P = r_{K,\pi/2}(A)$ on a $KA = KP = \frac{AB}{2}$ donc $\boxed{KP = IJ}$.

2. Comme $KP = IJ$ il existe un déplacement unique r du plan qui transforme K en J et P ent I.

De plus $\left(\widehat{\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{JI}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{KB}}\right) (2\pi)$ car $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KB}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{KP}, \overrightarrow{JI}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.
r est donc une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. L'image de la demi-droite $[KI[$ est la demi-droite $[Jx[$ telle que $(\widehat{[KI[, [Jx[}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Or la droite (KI) étant droite des milieux du triangle ABC on a $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{JC}$ et comme $\left(\widehat{\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JN}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ on a $\left(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{JN}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Par conséquent on a $[Jx[= [JN[$ et $\boxed{r([KI[) = [JN[}$.

L'image de I par r est donc le point I' de la demi-droite $[JN[$ tel que $JI' = KI$. Comme en 1/ on a $KI = JN$ donc $\boxed{I' = r(I) = N}$.

Par r on a donc $P \longmapsto I$ et $I \longmapsto N$ donc $PI = IN$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{IN}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc le triangel PIN est rectangle et isocèle en I.

4. $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$: c'est donc une symétrie centrale.

D'autre part on a $B \overset{r_1}{\longmapsto} A$ (car le triangle ABP est rectangle et isocèle en P) et de même $A \overset{r_2}{\longmapsto} C$ donc $r_2 \circ r_1 (B) = C$. $r_2 \circ r_1$ est donc la symétrie centrale de centre I, milieu de $[BC]$.

5. On a $r_1 = s_{(PN)} \circ s_\Delta$, Δ étant la droite passant par P telle que $(\widehat{\Delta, (PN)}) \equiv \frac{\pi}{4} (\pi)$ et $r_2 = s_{\Delta'} \circ s_{(PN)}$, Δ' étant la droite passant par N telle que $(\widehat{(NP), \Delta'}) \equiv \frac{\pi}{4} (\pi)$.

On a alors $r_2 \circ r_1 = s_{\Delta'} \circ s_{(PN)} \circ s_{(PN)} \circ s_\Delta = s_{\Delta'} \circ s_\Delta$ (car $s_{(PN)} \circ s_{(PN)} = Id$).

Comme $r_2 \circ r_1$ est la symétrie centrale de centre I alors les droites Δ et Δ' sont sécantes en I.

On a donc $\Delta = (PI)$ et $\Delta' = (NI)$, et par conséquent $(\widehat{(PI), (PN)}) \equiv (\widehat{(NP), (NI)}) \equiv \frac{\pi}{4} (\pi)$ donc le triangle PIN est rectangle et isocèle en I.

$\boxed{2}$ **1.** Supposons que $\overrightarrow{f}(x) = 0_E$ avec $x \neq 0_E$. Alors, si $A \in E$ l'image de la droite $D = A + \langle x \rangle$ est $f(A) + \left\langle \overrightarrow{f}(x) \right\rangle = \{f(A)\}$ qui n'est pas une droite et contredit l'hyposthèse. On a donc $x = 0_E$ et $\overrightarrow{f}$ est injective. Comme $\overrightarrow{E}$ est de dimension finie, $\overrightarrow{f}$ est bijective, donc f aussi.

2. Pour $x \in \overrightarrow{E} - \{0_E\}$ l'image de la droite D passant par A et de vecteur directeur x est la droite D' passant par $f(A)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{f}(x)$. Comme $D = D'$ les vecteurs x et $\overrightarrow{f}(x)$ sont colinéaires donc $\boxed{\exists \lambda_x \in \mathbb{R} / \overrightarrow{f}(x) = \lambda_x . x}$.

3. Supposons que le système $(x, y) \in E^2$ soit libre. Il existe λ_x et λ_y réels tels que $\overrightarrow{f}(x) = \lambda_x . x$ et $\overrightarrow{f}(y) = \lambda_y . y$. De même il existe $\lambda_{x+y} \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{f}(x + y) = \lambda_{x+y} . (x + y)$.

$\overrightarrow{f}$ étant linéaire on obtient $\overrightarrow{f}(x) + \overrightarrow{f}(y) = \lambda_{x+y} . (x + y) = \lambda_x . x + \lambda_y . y$, soit $\lambda_{x+y} . x + \lambda_{x+y} . y = \lambda_x . x + \lambda_y . y$. Le système (x, y) étant libre on a donc $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Si (x, y) est lié on a par exemple $y = \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Donc $\overrightarrow{f}(y) = \alpha \overrightarrow{f}(x) = \alpha \lambda_x . x$ et d'autre part $\overrightarrow{f}(y) = \lambda_y . y = \lambda_y . \alpha x$, donc $\alpha \lambda_x . x = \lambda_y . \alpha x$. Comme x et α sont non nuls (car y non nul) on a $\lambda_x = \lambda_y$.

4. D'après 3/ le scalaire λ_x ne dépend pas de x pour x non nul. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{f}(x) = \lambda x$ pour tout x non nul. Cette relation étant vraie aussi pour $x = 0_E$ on a donc $\boxed{\forall x \in E, \overrightarrow{f}(x) = \lambda x}$. De plus, $\overrightarrow{f}$ étant bijective, λ est non nul.

Si $\lambda = 1$ alors f est une translation.

Si $\lambda \neq 1$ alors f est une homothétie de rapport λ.

Réciproquement ces applications vérifient la propriété (P).

Conclusion : les applications vérifiant (P) sont les translations et les homothéties.

$\boxed{3}$ **1.** On a $\overrightarrow{MM'}^2 = \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'}\right)^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right)^2 + 2\,\overrightarrow{HH'}.\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{HH'}$ est directeur de Δ et $\overrightarrow{MH}$ appartient à la direction de D qui est orthogonale à Δ donc on a $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{MH} = 0$. De même $\overrightarrow{H'M'}$ appartient à la direction de D' donc $\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M'} = 0$.

On a donc $\overrightarrow{HH'}.\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right) = \overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M'} = 0$.

On a alors : $\overrightarrow{MM'}^2 = \overrightarrow{HH'}^2 + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right)^2$.

Cette relation s'écrit $MM'^2 = HH'^2 + \left\|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\right\|^2$ donc $MM \geq HH'$ et le minimum des distances MM' est égal à HH'.

2. On a $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'}\right) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{AH} + (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{HH'} + (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{H'A'}$. Or $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{0}$ car $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur orthogonal à D et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D; de même $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{H'A'} = \overrightarrow{0}$ donc $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{HH'}$.

En prenant la valeur absolue des deux membres il vient $\left|(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{AA'}\right| = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|.\left\|\overrightarrow{HH'}\right\|$ car les vecteurs $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{HH'}$ sont colinéaires. On obtient $\boxed{HH' = \frac{\left|(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{AA'}\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AA'}\right)\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}}$.

3. Un vecteur directeur de D est un vecteur normal à P : on peut prendre $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, 1-2)$. D'autre part le système $\left\{\begin{array}{lcl} x + y - z - 1 & = & 0 \\ 3x + z + 3 & = & 0 \end{array}\right.$ se résout en prenant (par exemple) $x = k$ comme paramètre et on obtient des équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & k \\ y & = & -2 - 4k \\ z & = & -3 - 3k \end{array}\right.$ de la droite D' donc on prend $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(1, -4, -3)$ et $A'(0, -2, -3)$.

On a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\,(-11, 1, -5)$ et $\overrightarrow{AA'}\,(-1, -1, -5)$ soit $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \sqrt{147}$ et $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{AA'} = 35$ d'où $d = \frac{35}{\sqrt{147}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

$\boxed{4}$ **1.** Le système $\{(A,\ 2),\ (B,\ -1),\ (C,\ m)\}$ admet un barycentre ssi $2 - 1 + m = 1 + m \neq 0$, i.e.$m \neq -1$.

2. $G_0 = bar\{(A,\ 2),\ (B,\ -1)\}$. Pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MG_0} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$, et pour $M = B$, $\overrightarrow{BG_0} = 2\overrightarrow{BA}$ (donc A est le milieu de $[G_0B]$).

D'après l'associativité de barycentre, G_2 est le barycentre de $\{(G_0, 1), (C, 2)\}$. On a donc : $\forall M \in P$, $\overrightarrow{MG_2} = \frac{\overrightarrow{MG_0} + 2\overrightarrow{MC}}{3}$, et pour $M = G_0$, $\overrightarrow{G_0G_2} = \frac{2\overrightarrow{G_0C}}{3}$.

D'autre part $G_0C = CB = a\sqrt{2}$, donc $G_0G_2 = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

3. Pour tout point M du plan on a $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG_2}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, où G est le centre de gravité du triangle ABC (i.e. l'isobarycentre de A, B, C).

On a alors : $M \in \Gamma_1 \iff \left\|3\overrightarrow{MG_2}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| \iff MG_2 = MG$. Donc Γ_1 =médiatrice de $[G_2G]$.

De même $M \in \Gamma_2 \iff \left(3\overrightarrow{MG_2}\right) \cdot \left(3\overrightarrow{MG}\right) = 0 \iff \overrightarrow{MG_2}.\overrightarrow{MG} = 0 \iff M \in \mathcal{C}$, cercle de diamètre $[G_2G]$.

D'autre part, pour tout point M du plan, $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MC}^2 = 2\left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2B}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2C}\right)^2$, soit en developpant : $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 3MG_2^2 + 2G_2A^2 - G_2B^2 + 2G_2C^2 + 2\overrightarrow{MG_2}.\left(2\overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{G_2B} + 2\overrightarrow{G_2C}\right)$. Comme $2\overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{G_2B} + 2\overrightarrow{G_2C} = \overrightarrow{0}$ (définition du barycentre) il vient : $2MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 3MG_2^2 + 2G_2A^2 - G_2B^2 + 2G_2C^2$.

Posons $\beta = 2G_2A^2 - G_2B^2 + 2G_2C^2$. On a pour tout point M du plan : $M \in \Gamma_3 \iff 3MG_2^2 = a^2 - \beta \iff MG_2^2 = \frac{a^2-\beta}{3}$. Donc Γ_3 est soit l'ensemble vide (si $a^2 - \beta < 0$) soit un cercle de centre G_2.

De façon évidente on a $A \in \Gamma_3$ donc Γ_3 est le cercle de centre G_2 passant par A.

$\boxed{\mathbf{5}}$ **1.** Un vecteur normal de P est $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a : $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \in P \iff \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff x \times 1 + (y-1) \times 1 + (z-1) \times (-2) = 0$, soit une équation cartésienne de P : $\boxed{x + y - 2z + 1 = 0}$.

2. Des équations paramétriques de D sont $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Pour tout réel t on a $(1+t) + t - 2(1+t) + 1 = 0$ donc tout point de D appartient à P i.e. $\boxed{D \subset P}$.

3. Résolvons le système : $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$. Il est équivalent à $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$ $(L_2 \leftarrow 3L_1$

En prenant $y = t$ pour paramètre on obtient $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ qui sont des équations parmétrique d'une droite D' de vecteur directeur $\overrightarrow{d} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{d}$ est un vecteur normal P on a donc $\boxed{D' \perp P}$.

On a $M \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \in P \cap D'$ ssi x, y et z vérifient le système $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$. Ce système se résout par substitution et on trouve $x = -1/3, y = 2/3$ et $z = 2/3$, donc $C \left| \begin{array}{l} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{array} \right.$.

4. On a $H \in D$ et $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{u} = 0$ donc les coordonnées (x, y, z) de H vérifient le système $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \\ \left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(y - \frac{2}{3}\right) + \left(z - \frac{2}{3}\right) = 0 \end{cases}$. On trouve $t = -1/3$ et $x = 2/3, y = -1/3, z = 2/3$ donc

$H \left| \begin{array}{l} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{array} \right.$.

La distance de la droite D à la droite D' est donc $CH = \sqrt{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{2}$.

$\boxed{6}$ **1.** Si $D \subset P$ ou si D et P sont sécants il existe un point A appartenant à $D \cap P$, donc, par définition de d, $d \leq AA = 0$ donc $\boxed{d = 0}$.

2. Soit A' un autre point de D et H' son projeté orthogonal sur P.

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de D et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal de P soit le plan Π passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$. On a $D \subset \Pi$ donc A et A' appartiennent à Π. D'autre part les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{A'H'}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{n}$ donc les points H et H' appartiennent aussi à Π. Les points A, A', H et H' sont donc coplanaires.

Dans le plan Π la quadrilatère $AA'H'H$ est un parallélogramme car $(AA') // (HH')$ et $(AH) // (AH')$ donc $AH = A'H'$.

Conclusion : $d = AH$ ne dépend pas du point A de la droite D.

Si A est un point quelconque de D et si M est un point de P, le triangle AMH est rectangle en H donc $AM \geq AH$, donc la distance de D à P est égale à $d = AH$.

3. a. On écrit $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{u}$.

On a donc $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} + \left(\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires (car H et B appartiennent au plan P) donc leur produit mixte $\left(\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}$ est nul, d'où $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}$.

On a donc $\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}\right| = \left|\left(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}\right|$.

Le vecteur $\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$ donc $\left|\left(\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}\right| = \left\|\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u}\right\| \times \|\overrightarrow{v}\|$ et $\left\|\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| \times \|\overrightarrow{u}\|$ car $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

On a donc $\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}\right| = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| \times \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$, soit $\boxed{d = AH = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v}\right|}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{u}\|}}$.

4. D est la droite passant par le point A de coordonnées $(1, -2, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2, 1, -3)$ et P est le plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1, 1, 1)$. Comme $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ la droite D est parallèle à P. D'autre part $A \notin P$ donc D n'est pas incluse dans P.

Pour appliquer la formule précédente on trouve un vecteur $\overrightarrow{v}$ dans la direction de P et orthogonal à $\overrightarrow{u}$: on peut prendre $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n} \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{array} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; on prend par exemple $B\,(1, 1, 1) \in P$.

On a $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{14}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{42}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\,(-10, 2, -3)$ et $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = -56$, d'où $d = \frac{56}{\sqrt{14}\times\sqrt{42}} = \frac{28}{\sqrt{147}}$.

$\boxed{7}$ **1.** On a $f(F) = \{f(M) / M \in F\}$. Un point M de F s'écrit $M = A + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ et f étant affine on a $f(M) = f(A + \overrightarrow{u}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ donc $f(F) = \left\{f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) / \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}\right\}$ soit $\boxed{f(F) = f(A) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{F}\right)}$.

2. I est le milieu de $[AB]$ ssi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. En prenant l'image par $\overrightarrow{f}$ on a, $\overrightarrow{f}$ étant linéaire : $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{IA}\right) + f\left(\overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{I'A'}$ et $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{I'B'}$ on obtient $\overrightarrow{I'A'}+\overrightarrow{I'B'}=\overrightarrow{0}$, ce qui signifie que I' est le milieu de $[A'B']$.

3. Si $O\in P$ on a $f(P)=f(O)+\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{P}\right)$ d'après 1/. Comme $\overrightarrow{f}$ n'est pas bijective elle n'est pas surjective (car $\overrightarrow{f}$ est une application linéaire de $\overrightarrow{P}$ dans lui-même) donc $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{P}\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{P}$ de dimension <2, donc c'est une droite vectorielle ou $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et donc $f(P)$ est soit une droite affine soit un point. Alors $f(\Gamma)=\Gamma$ serait contenue dans une droite ou un point ce qui est absurde.

En conclusion f est bijective.

4. Si $[AB]$ un diamètre de Γ alors O est milieu de $[AB]$ donc O' est le milieur de $[A'B']$ d'après 2/.

Si $[CD]$ un autre diamètre de Γ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ forment un système libre donc $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{C'D'}$ aussi car $\overrightarrow{f}$ est bijective, donc les droites $(A'B')$ et $(C'D')$ ne sont pas parallèles.

Le point O' appartient alors aux médiatrice de $[AB]$ et de $[CD]$ qui sont concourantes au point O, centre du cercle Γ, donc $\boxed{O'=f(O)=O}$.

5. Soit $\overrightarrow{x}$ de norme 1. Posons $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{OM}$. Alors $M\in\Gamma$, donc $M'\in\Gamma$, soit $\left\|\overrightarrow{OM'}\right\|=1$.

Or $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{O'M'}=\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right)$, soit $\left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right)\right\|=1$.

Si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur non nul alors $\frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}$ est de norme 1 donc $\left\|\overrightarrow{f}\left(\frac{\overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x}\|}\right)\right\|=1$.

Cela équivaut à $\frac{1}{\|\overrightarrow{x}\|}\left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right)\right\|=1$, ou encore $\left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right)\right\|=\|\overrightarrow{x}\|$.

Cette égalité étant valable aussi si $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$, alors on a $\left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right)\right\|=\|\overrightarrow{x}\|$ pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\overrightarrow{P}$.

Conclusion : l'application $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle et f est une isométrie affine de P.

6. Si f est un déplacement (ou isométrie positive), comme elle a O pour point invariant, donc c'est une rotation de centre O. Si c'est un antidéplacement c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par O. Réciproquement ces isométrie conservent bien le cercle Γ.

Donc l'ensemble des applications affines f telles que $f(\Gamma)=\Gamma$ est l'ensemble des isométries de P qui invarient le point O.