$\boxed{\textbf{M1}}$ Le but du problème est de calculer la puissance n-ième d'une matrice de plusieurs façons.

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de type $(3,3)$ à coefficients réels.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité.

Si M appartient à $M_3(\mathbb{R})$ on rappelle que $M^0 = I$.

Partie A

1. a. Calculer A^2 et A^3.

b. Montrer que A, A^2 et A^3 se mettent sous la forme :

$$A = \alpha_1 A + \beta_1 I,\ A^2 = \alpha_2 A + \beta_2 I,\ A^3 = \alpha_3 A + \beta_3 I,$$

où α_i et β_i $(1 \leq i \leq 3)$ sont des réels à préciser.

2. Déduire de l'expression de A^2 que A est inversible et calculer *très simplement* l'inverse de A.

3. On définit la suite réelle (λ_n) par $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ et la relation de récurrence $\lambda_{n+2} = \lambda_{n+1} + 2\lambda_n$ (pour $n \geq 0$).

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $A^n = \lambda_n A + 2\lambda_{n-1} I$.

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\lambda_n = \frac{1}{3}\left[(-1)^{n+1} + 2^n\right].$$

b. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

Partie B

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.

6. a. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

b. Calculer D^n pour n entier naturel.

c. En déduire l'expression de A^n en fonction de n et comparer avec le résultat du A. 4. b.

Partie C

7. On pose $J = A + I$ et $K = A - 2I$.

Calculer JK, KJ, J^2 et K^2.

En déduire une expression simple de J^n et de K^n pour tout entier naturel n.

8. Exprimer A comme comme combinaison linéaire de J et de K.

En déduire une nouvelle façon de calculer A^n. [ex14.2015]

Corrigé :

1. a. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

b. On immédiatement $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 0$; $A^2 = A + 2I$ donc $\alpha_2 = 1$ et $\beta_2 = 2$; $A^3 = 3A + 2I$ donc $\alpha_3 = 3$ et $\beta_3 = 2$.

2. On a $A^2 - A = 2I$ soit $A\left(\frac{1}{2}(A-I)\right) = I$; de même $\left(\frac{1}{2}(A-I)\right)A = I$. Cela signifie que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Soit la propriété P_n : "$A^n = \lambda_n A + 2\lambda_{n-1} I$".
La propriété est vraie pour $n = 1$ ($\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$) et pour $n = 2$ ($\lambda_2 = 1$).
Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un entier n donné.
On a $A^{n+1} = A^n A = (\lambda_n A + 2\lambda_{n-1} I)A = \lambda_n A^2 + 2\lambda_{n-1}A = \lambda_n(A + 2I) + 2\lambda_{n-1}A$ (par 1. a.) soit $A^{n+1} = (\lambda_n + 2\lambda_{n-1})A + 2\lambda_n I = \lambda_{n+1}A + 2\lambda_n I$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : on a $A^n = \lambda_n A + 2\lambda_{n-1} I$ pour tout entier naturel n.

4. a. Soit la propriété Q_n : "$\lambda_n = \frac{1}{3}\left[(-1)^{n+1} + 2^n\right]$".
La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ ($\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$).
Si Q_k pour tout entier k inférieur ou égal à n on a $\lambda_{n+1} = \lambda_n + 2\lambda_{n-1} = \frac{1}{3}\left[(-1)^{n+1} + 2^n\right] + \frac{2}{3}\left[(-1)^n + 2^{n-1}\right]$, soit $\lambda_{n+1} = \frac{1}{3}\left[(-1)^{n+1} + 2^n + 2(-1)^n + 2^n\right]$, d'où $\lambda_{n+1} = \frac{1}{3}\left[(-1)^n + 2^{n+1}\right] = \frac{1}{3}\left[(-1)^{n+2} + 2^{n+1}\right]$.
Conclusion : la propriété Q_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 0$.

4. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = \frac{1}{3}\left[(-1)^{n+1} + 2^n\right]A + \frac{2}{3}\left[(-1)^n + 2^{n-1}\right]I$.

5. On résout le système $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -1 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_1 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 2 & a+c \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_2 + L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & a+b+c \end{array}\right)$.

Le système a une solution unique $\left(\frac{2a-b-c}{3}, \frac{-a+2b-c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)$ donc la matrice P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. a. On obtient $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b. Par une récurrence facile on a pour tout entier naturel n avec $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

c. De $D = P^{-1}AP$ on déduite $PD = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})AP$ (associativité du produit des matrices), soit $PD = AP$. En mulitipliant les deux membre à droite par P^{-1} on obtient de même : $A = PDP^{-1}$.

Par récurrence on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Soit $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

soit $\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2(-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}}$.

7. On trouve $JK = KJ = 0$ (matrice nulle), $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $K^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

On a donc $J^2 = 3J$ et par une récurrence évidente on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 3^{n-1}J$.
De même $K^2 = -3K$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, K^n = (-3)^{n-1} K$.

8. $J = A + I$ et $K = A - 2I$. On a $2J + K = 3A$ donc $A = \frac{1}{3}(2J + K)$.
Comme $2J$ et K commutent on peut appliquer la formule du binôme du Newton. Pour tout entier naturel n on a donc $A^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n} 2^k J^k K^{n-k}$.

D'autre part, comme $JK = 0$, on a $J^p K^q = 0$ pour p et q entiers ≥ 1. Tous les termes de la somme sont donc nuls sauf pour $k = 0$ et $k = n$. Il reste donc $A^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (K^n + 2^n J^n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left((-3)^{n-1} K + 2^n 3^{n-1} J\right)$ soit $\boxed{A^n = \frac{1}{3}\left((-1)^{n-1} K + 2^n J\right)}$.
On retrouve la formule de 6. c.