$\boxed{\textbf{M2}}$ Pour a, b et c réels soit $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

On note $E = \{M_{a,b,c} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ et I_3 la matrice identité de type $(3,3)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriele $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ des matrices carrées de type $(3,3)$. En donner une base très simple et sa dimension.

2. Calculer le déterminant de $M_{a,b,c}$ (mettre le résultat sous forme factorisé).

Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice $M_{a,b,c}$ est-elle inversible ?

3. On note $Q = M_{1,0,-3}$. Calculer Q^2.

En déduire une relation entre Q, Q^2 et I_3. Montrer très simplement que Q est inversible et calculer Q^{-1}.

4. Calculer pour tout entier naturel n le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 8$.

En déduire l'expression de Q^n en fonction de Q, I_3 et n.

On note u l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $M_{a,b,c}$ et on pose $f_1 = (-1,0,1)$, $f_2 = \left(1, \sqrt{2}, 1\right)$, $f_3 = \left(1, -\sqrt{2}, 1\right)$.

5. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Calculer $u(f_k)$ en fonction de f_k pour $k \in \{1,2,3\}$.

7. En déduire *très simplement* la matrice M' de u dans la base (f_1, f_2, f_3).
Ecrire M' en fonction de $M_{a,b,c}$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer M'^n puis exprimer M^n en fonction de P et de M'^n.[ex20.2015]

<u>*Corrigé*</u> :

1. Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ on a $M_{a,b,c} = aI_3 + bJ + cK$, donc E est le sev de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ engendré par I, J et K.

Montrons que le système (I_3, J, K) est libre : on a $aI_3 + bJ + cK = 0$ ssi $M_{a,b,c} = 0$ ssi $a = b = c = 0$. Le système (I, J, K) est donc libre, et comme il est générateur, c'est une base de E. Dons $\boxed{\dim E = 3}$.

2. On a $\det M_{a,b,c} = \begin{vmatrix} a & b & c-a \\ b & a+c & 0 \\ c & b & a-c \end{vmatrix}$ $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$= $(c-a) \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a+c & 0 \\ c & b & -1 \end{vmatrix}$, soit $\det M_{a,b,c} = (c-a) \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a+c & 0 \\ a+c & 2b & 0 \end{vmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$= $(c-a) \begin{vmatrix} b & a+c \\ a+c & 2b \end{vmatrix}$ (en developpant par rapport à la troisième colonne) soit $\det M_{a,b,c} = (c-a)\left[2b^2 - (a+c)^2\right]$ donc $\boxed{\det M_{a,b,c} = (c-a)\left(\sqrt{2}b\right.}$

La matrice $M_{a,b,c}$ est inversible ssi $\det M_{a,b,c} \neq 0$ ssi $\left(c \neq a \text{ et } \sqrt{2}b + a + c \neq 0 \text{ et } \sqrt{2}b - a - c \neq 0\right)$.

3. On a $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul facile donne $Q^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. On remarque que $\boxed{Q^2 - 2Q - 8I_3 = 0}$.

De cette relation on déduit que $Q(Q - 2I_3) = 8I_3$ soit $Q\left[\frac{1}{8}(Q - 2I_3)\right] = I_3$. Donc Q est inversible à droite, donc aussi à gauche, et $\boxed{Q^{-1} = \frac{1}{8}(Q - 2I_3) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

4. Q_n et R_n sont le quotient et le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-2X-8 ssi $X^n = (X^2-2X-8)\,Q_n + R_n$ avec $\mathrm{d}^\circ R_n < 2$, donc R_n s'écrit $R_n = \alpha_n X + \beta_n$ avec $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$.

En prenant $X=-2$ puis $X=4$ (les deux racines de X^2-2X-8) dans la relation précédente on obtient le système $(-2)^n = -2\alpha+\beta$ et $4^n = 4\alpha+\beta$, d'où $\alpha_n = \frac{4^n+(-1)^{n+1}2^n}{6}$ et $\beta_n = \frac{4^n+(-1)^n 2^{n+1}}{3}$.

En remplaçant dans l'égalité de la division euclidienne X par Q, on obtient, vu que $Q^2 - 2Q - 8I_3 = 0$: $\boxed{Q^n = \alpha_n Q + \beta_n I_3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Comme (f_1, f_2, f_3) est de cardinal 3 et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ce sera une base de $\mathbb{R}^3$ si ce système est libre. Pour $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ on a $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = (0,0,0)$ ssi $\left(-\alpha+\beta+\gamma, \sqrt{2}\beta - \sqrt{2}\gamma, \alpha+\beta+\gamma\right) = (0,0,0)$ ce qui donne $\alpha=\beta=\gamma=0$, donc (f_1,f_2,f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. En multipliant la matrice $M_{a,b,c}$ par $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on trouve $u(f_1) = (a-c)\, f_1$.

De même on trouve $u(f_2) = \left(a + b\sqrt{2} + c\right) f_2$ et $u(f_3) = \left(a - b\sqrt{2} - c\right) f_3$.

7. D'après la question précédente on a immédiatement

$$M' = \mathrm{Mat}\,(u, (f_1, f_2, f_3)) = \begin{pmatrix} a-c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\sqrt{2}+c & 0 \\ 0 & 0 & a-b\sqrt{2}+c \end{pmatrix}.$$

On a $M' = P^{-1} M_{a,b,c} P$ où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (f_1,f_2,f_3) soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc, pour tout entier naturel n on a $M'^n = \begin{pmatrix} (a-c)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(a+b\sqrt{2}+c\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(a-b\sqrt{2}+c\right)^n \end{pmatrix}$.

8. De $M' = P^{-1} M_{a,b,c} P$ on déduit que $M = P M' P^{-1}$.

Par une récurrence facile on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P M'^n P^{-1}}$ avec $M'^n = \begin{pmatrix} (a-c)^n & 0 \\ 0 & \left(a+b\sqrt{2}+c \right. \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$