On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}3&6&-4\\-1&2&1\\1&6&-2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

On note $I=I_3$ la matrice identité de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

2. Calculer $(P-I)^3-2P$. En déduire, sans résoudre de système, que P est inversible et donner P^{-1}.

3. Comparer les matrices AP et PT. En déduire que $A=PTP^{-1}$.

4. Montrer que, pour tout entier $n\geq 0$, on a : $A^n=PT^nP^{-1}$.

Montrer que la formule précédente est encore valable pour $n=-1$.

5. Montrer que, pour tout entier $n\geq 0$, il exister un réel α_n tel que $T^n=\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&2^n&\alpha_n\\0&0&2^n\end{pmatrix}$.

Quelle relation existe-t'il entrer α_n et α_{n+1} ?

6. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=n2^{n-1}$. En déduire une expression détaillée de T^n.

7. On veut retrouver le résultat précédent d'une autre façon.

On pose $J=T-2I$.

a. Calculer J^0,J^1,J^2,J^3, puis établir l'expression de J^k pour tout k entier ≥ 2 à l'aide de la matrice $K=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

b. Retrouver les résultats de la question 6/.

8. Une application : on définit trois suites $(u_n),(v_n)$ et (w_n) par

$$(u_0,v_0,w_0)=(1,-1,2)\ \text{ et : }\forall n\in\mathbb{N},\left\{\begin{array}{rl}u_{n+1}=&3u_n+6v_n-4w_n\\v_{n+1}=&-u_n+2v_n+w_n\\w_{n+1}=&u_n+6v_n-2w_n\end{array}\right..$$

Expliquer comment, à l'aide des questions précédentes, on obtiendrais une expression de u_n,v_n et w_n en fonction de n (on ne demande pas tous les calculs).

9. Une autre application : pour toute matrice B on note $C(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B, autrement dit :

$$C(B)=\{M\in M_{\mathbb{R}}(3,3)\,/MB=BM\}.$$

a. Donner quelques éléments de $C(B)$.

b. Montrer que si M et M' sont dans $C(B)$, alors $M+M'$ est encore un élément de $C(B)$

c. Montrer que si M et M' sont dans $C(B)$, alors MM' est encore un élément de $C(B)$ et que si M inversible appartient à $C(B)$, alors M^{-1} est encore un élément de $C(B)$.

d. Montrer que pour toute matrice M de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ on a l'équivalence :

$$M\in C(A)\iff P^{-1}MP\in C(T).$$

e. Montrer que les éléments de $C(T)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&e&f\\0&0&e\end{pmatrix}$, où a,e et f sont des réels quelconques.

f. En déduire l'ensemble $C(A)$ en fonction des paramètres a, e et f.

<u>*Correction*</u> :

1. Considérons le système, noté matriciellement : $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 & \vdots & x' \\ -1 & 2 & 1 & \vdots & y' \\ 1 & 6 & -2 & \vdots & z' \end{pmatrix}$. On obtient les systèmes équivalents $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 & \vdots & x' \\ 0 & 12 & -1 & \vdots & x'+3y' \\ 0 & -12 & 2 & \vdots & x'-3z' \end{pmatrix}$ $(L_2 \leftarrow L_1+3L_2, L_3 \leftarrow L_1-3L_3)$, $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 & \vdots & x' \\ 0 & 12 & -1 & \vdots & x'+3y \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2x'+3y' - \end{pmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_2+L_3)$. Le système ayant une solution unique, la matrice A est inversible et on obtient : $z = 2x'+3y'-3z', y = \frac{x'}{4}+\frac{y'}{2}-\frac{z'}{4}, x = \frac{5x'}{2}+3y'-\frac{7z'}{2}$, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3 & -7/2 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. On trouve $(P-I)^3 - 2P = (0)$ (matrice nulle). En développant : $P^3 - 3P^2 + 3P - I - 2P = 0$, soit $P^3 - 3P^2 + P = I$,ou $P(P^2 - 3P + I) = I$. De même $(P^2 - 3P + I)P = I$, donc P est inversible et $P^{-1} = P^2 - 3P + I$, soit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On trouve $AP = PT = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

En multipliant les deux membres à droite par P^{-1} on obtient $A = PTP^{-1}$.

4. Soit la propriété $P(n)$: "$A^n = PT^nP^{-1}$".

$P(0)$ est vraie ($A^0 = I = PP^{-1}$) ainsi que $P(1)$ d'après 3/.

Supposons $P(n)$ vraie : $A^n = PT^nP^{-1}$. On a $A^{n+1} = A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1})$ (d'après l'hypothèse de récurrence et la question 3/), donc $A^{n+1} = PT^n(P^{-1}P)TP^{-1}$ (associativité du produit des matrices) et $A^{n+1} = PT^nITP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proprité $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

5. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $Q(n)$: "$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$".

Les propriétés $Q(0)$ et $Q(1)$ sont vraie avec $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.

Supposons que $Q(n)$ soit vraie. On a $T^{n+1} = T^nT = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, soit $T^{n+1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2^n + 2\alpha_n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$. La propriété $Q(n+1)$ est donc vraie avec $\alpha_{n+1} = 2^n + 2\alpha_n$.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proprité $Q(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. De plus on a la formule de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$.

6. Récurrence sur n : soit $R(n)$ la propriété "$\alpha_n = n2^{n-1}$".

$R(0)$ et $R(1)$ sont vraies d'après 5/.

Supposons $R(n)$ vraie pour un entier n donné. On a $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n = 2n2^{n-1} + 2^n$ (d'après l'hypothèse de récurrence), soit $\alpha_{n+1} = 2^n(n+1)$, donc $R(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proprité $R(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

7. On a $J = T - 2I = T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. On trouve $J^0 = I, J^1 = J, J^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par une récurrence facile on montre que pour $k \geq 2$, $J^k = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $J^k = (-3)^k K$, avec $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. On a $T = J + 2I$. Comme les matrices J et $2I$ commutent, on peut employer la formule du binôme du Newton : $T^n = (J + 2I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k$.

Compte tenu de la question précédente on obtient, pour $n \geq 2$: $T^n = 2^n I + n2^{n-1} J + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^k K$.

D'autre part on a : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^k = (2-3)^n = (-1)^n$ (binôme de Newton), donc $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^k = (-1)^n - 2^n + 3n2^{n-1} = (-1)^n + (3n-2) 2^{n-1}$.

On a donc, pour $n \geq 2$: $T^n = 2^n I + n2^{n-1} J + \left[(-1)^n + (3n-2) 2^{n-1}\right] K$, soit : $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

8. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ on a immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Par une récurrence facile on obtient, pour tout entier naturel n : $X_n = A^n X_0 = PT^n P^{-1} X_0$. En effectuant le produit des matrices $PT^n P^{-1}$ par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ on obtiendrait l'expression de u_n, v_n et w_n.

9. a. La matrice nulle, la matrice identité I, λI pour tout réel λ et B appartiennent à $C(B)$.

b. Soient M et M' dans $C(B)$. On a donc $MB = BM$ et $M'B = BM'$. En ajoutant membres à membres on obtient : $MB + M'B = BM + BM'$, soit $(M + M')B = B(M + M')$, donc $M + M' \in C(B)$.

c. Soient M et M' dans $C(B)$. On a $(MM')B = M(M'B) = M(BM')$ (car $M' \in C(B)$), donc $(MM')B = (MB)M' = (BM)M'$ (car $M \in C(B)$)$= B(MM')$, donc $MM' \in C(B)$.

Soit $M \in C(B)$ et M inversible. On a $MB = BM$; en multipliant les deux membres à gauche par M^{-1} il vient $B = M^{-1}BM$ et en multipliant les deux membres à droite par M^{-1}, $BM^{-1} = M^{-1}B$, donc $M^{-1} \in C(B)$.

d. On a $M \in C(A) \iff MA = AM \iff MPTP^{-1} = PTP^{-1}M$ (car $A = PTP^{-1}$).

En multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1} on obtient $(P^{-1}MP)T = T(P^{-1}MP)$, ce qui équivaut à dire que $P^{-1}MP$ appartient à $C(T)$.

e. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a : $M \in C(T) \iff MT = TM$. Comme $MT = \begin{pmatrix} -a & 2b & b+2c \\ -d & 2e & e+2f \\ -g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$ et $TM = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$.

On a donc : $M \in C(T) \iff b = c = d = g = h = 0, e = i \iff M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

f. D'après les questions précédentes on a : $M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(T)$ ce qui équivaut à : $\exists (a,e,f) \in \mathbb{R}^3 / \ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} P^{-1}$.

En effectuant on obtient : $M = \begin{pmatrix} -a+2e-2f & -2a+2e & 2a-2e+2f \\ -f & e & f \\ -a+e-2f & -2a+2e & 2a-e+2f \end{pmatrix}$.