Soit n un entier naturel non nul.

On note M_3 l'espace vectoriel des matrices $(3,3)$ à coefficients réels.

Pour a et b réels on note $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ et G l'ensemble des matrices $M_{a,b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de M_3. En préciser une base et sa dimension.

2. L'opposé d'un élément de G appartient-il à G ? La somme et le produit de deux éléments de G appartienent -ils à G ?

3. Calculer de déterminant de $M_{a,b}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $M_{a,b}$ soit inversible.

Dans la suite on veut calculer les puissances de $M_{a,b}$ de plusieurs façons.

Soit $B = (e_1 e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à $M_{a,b}$ (i.e. l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice $M_{a,b}$ dans la base B).

On suppose dans la suite b non nul.

4. Montrer que $f_1 = (1,1,1)$ est une base de $\ker (u - (a+2b)\, Id) = \{x \in \mathbb{R}^3 / u(x) = (a+2b)\, x\}$.

5. Montrer que (f_2, f_3) avec $f_2 = (1, 0 - 1)$ et $f_3 = (0, 1 - 1)$ est une base de $\ker (u - (a-b)\, Id) = \{x \in \mathbb{R}^3 / u(x) = (a-b)\, x\}$.

6. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. On la notera B'.

7. Calculer $u(f_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. En déduire *très simplement* la matrice D de u dans la base B'.

8. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique B à la base B'.

Calculer P^{-1} (on détaillera les calculs).

9. Exprimer $M_{a,b}$ en fonction de P et de D.

Expliquer comment on pourrait calculer $M_{a,b}^n$ pour tout entier naturel n (on ne demande pas d'effectuer les calculs).

Dans la suite on veut calculer $M_{a,b}^n$ d'une autre façon.

10. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par le polynôme $[X - (a+2b)]\,[X - (a-b)]$.

En admettant que $[M_{a,b} - (a+2b)\, I_3]\,[M_{a,b} - (a-b)\, I_3] = 0$ (matrice nulle) en en remplaçant X par $M_{a,b}$ dans la division euclidienne précédente exprimer $M_{a,b}^n$ en fonction de n, $M_{a,b}$ et I_3.

<u>*Correction*</u> :

1. Les éléments de G s'écrivent $aI_3 + bJ$ avec I_3 matrice identité de rang 3 et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc G est le sous-espace vectoriel engendré par (I_3, J) (ensemble des combinaisons linéaires de I_3 et J).

De plus on $aI_3 + bJ = 0$ ssi $M_{a,b} = 0$ ce qui équivaut à $a = b = 0$ donc le système (I_3, J) est libre. C'est donc une base de G d'où $\boxed{\dim G = 2}$.

2. Pour tous réels a, b, a' et b' on vérifie que $-M_{a,b} = M_{-a,-b} \in G$, $M_{a,b} + M_{a',b'} = M_{a+a',b+b'} \in G$ et $M_{a,b} \times M_{a,b} = M_{aa'+2bb',ab'+a'b+bb'}$ donc $M_{a,b} \times M_{a,b} \in G$.

3. On a $\det M_{a,b} = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} a & b-a & b-a \\ b & a-b & 0 \\ b & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ b & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix}$. En ajoutant la première ligne à la troisième on a : $\det M_{a,b} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ b & 1 & 0 \\ a+2b & 0 & 0 \end{vmatrix}$ soit $\boxed{\det M_{a,b} = (a-b)^2 (a+2b)}$ (en developpant par rapport à la troisième ligne).

La matrice $M_{a,b}$ est inversible ssi $\det M_{a,b} \neq 0$ soit $\boxed{M_{a,b} \text{ inversible} \iff a \neq b \text{ et } a \neq -2b}$.

4. $X(x,y,z) \in \ker(u - (a+2b) Id)$ ssi $u(X) = (a+2b) X$ ssi $\begin{cases} ax + by + bz &= (a+2b) x \\ bx + ay + bz &= (a+2b) y \\ bx + by + az &= (a+2b) z \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} -2x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{cases}$ (en transposant et en simplifiant par $b \neq 0$). En éliminant x dans les deux dernières équations en utilisant la première ce système équivaut à $\begin{cases} -2x + y + z &= 0 \\ -3y + 3z &= 0 \\ 3y - 3z &= 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -2x + y + z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{cases}$ ou $x = y = z$. Donc $\ker(u - (a+2b) Id) = \{(t,t,t) / t \in \mathbb{R}\}$: c'est la droite vectorielle de base $f_1 = (1,1,1)$.

5. De même :

$X(x,y,z) \in \ker(u - (a-b) Id) \iff u(X) = (a-b) X \iff \begin{cases} ax + by + bz &= (a-b) x \\ bx + ay + bz &= (a-b) y \\ bx + by + az &= (a-b) z \end{cases}$.

Ce système équivaut à $x + y + z = 0$ (en simplifiant par $b \neq 0$). En prenant $x = t$ et $y = t'$ pour inconnue auxiliaires on obtient $\ker(u - (a-b) Id) = \{X(t, t', -t - t')\}$. Comme $(t, t', -t - t') = t(1,0,-1) + t'(0,1,-1)$ donc (f_2, f_3) avec $f_2 = (1, 0-1)$ et $f_3 = (0, 1-1)$ est un système générateur de $\ker(u - (a-b) Id)$. Comme il est libre c'en est une base.

6. Comme (f_1, f_2, f_3) a trois éléments il suffit de montrer que ce système est libre pour prouver que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On a $\det(f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$ soit $\det(f_1, f_2, f_3) = 3 \neq 0$ donc le système (f_1, f_2, f_3) est libre et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(On peut aussi montrer que $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ ou encore que (f_1, f_2, f_3) est de rang 3).

7. On a $f_1 \in \ker(u - (a+2b) Id)$ donc $u(f_1) = (a+2b) f$; de même f_2 et $f_3 \in \ker(u - (a-b) Id)$ donc $u(f_2) = (a-b) f_2$ et $u(f_3) = (a-b) f_3$.

La matrice de u dans la base B' est donc $\boxed{D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}}$.

8. On a $P = P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$. En résolvant le système $\begin{cases} x + y &= x' \\ x + z &= y' \\ x - y - z &= z' \end{cases}$ on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

9. D'après le cours on a $D = P^{-1} M_{a,b} P$ soit $M_{a,b} = P D P^{-1}$.

Par une récurrence facile on trouve que, pour tout entier naturel n, on a $\boxed{M_{a,b}^n = PD^nP^{-1}}$,
avec $D^n = \begin{pmatrix} (a+2b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}$.

10. La division euclidienne de X^n par $[X-(a+2b)]\,[X-(a-b)]$ donne

$$X^n = [X-(a+2b)]\,[X-(a-b)]\,Q + R \text{ avec } d^\circ R < 2.$$

Il existe donc α_n et β_n réels tels que $R\,(X) = \alpha_n X + \beta_n$. En remplaçant X par $a+2b$ puis par $a-b$ dans la relation précédente on obtient le système : $\begin{cases} (a+2b)^n & = & \alpha_n\,(a+2b) + \beta_n \\ (a-b)^n & = & \alpha_n\,(a-b) + \beta_n \end{cases}$.
Après résolution on obtient

$$\alpha_n = \frac{(a+2b)^n - (a-b)^n}{3b} \text{ et } \beta_n = \frac{(a+2b)\,(a-b)^n - (a+2b)^n\,(a-b)}{3b}.$$

En remplaçant X par $M_{a,b}$ dans l'égalité de la division euclidienne il vient

$$\boxed{M_{a,b}^n = \alpha_n M_{a,b} + \beta I_3}.$$