Exercices Matrices

$\boxed{1}$ On note $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ l'espace vectoriel des matrices réelles de type $(3,3)$ et I la matrice identité de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$.

Si $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n),(e_n),(f_n),(g_n),(h_n),(i_n)$ sont neuf suites réelles de limites respectives a,b,c,d,e,f,g,h,i on pose :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\begin{pmatrix}a_n & b_n & c_n\\ d_n & e_n & f_n\\ g_n & h_n & i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice appartenant à $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ on pose

$$S_n(A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n.$$

On admettra que pour tout réel x la suite $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x.

1. Dans cette question on pose $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^k pour tout entier naturel k.

b. Donner l'expression de $S_n(A)$ pour tout entier naturel $n\geq 1$ et en déduire $S=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n(A)$.

2. Dans cette question on pose $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2. En déduire A^k pour tout entier naturel non nul k.

b. Etablir que pour tout entier naturel $n\geq 1$ on a :

$$S_n(A)=I+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{k!}\right)A.$$

c. En déduire $S=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n(A)$.

3. Dans cette question on pose $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et vérifier que $A^2-2A+I=0$.

b. Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}, A^k=kA-(k-1)I$.
Donner une expression de $S_n(A)$ en fonction de A et de I.

c. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{k-1}{k!}=-\frac{1}{n!}$.

d. Déduire des question précédente $S=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n(A)$.

$\boxed{2}$ Dans l'ensemble $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ des matrices carrées de type $(3,3)$ à coefficients réels on considère le sous-ensemble E des matrices qui s'écrivent $M(a,b)=\begin{pmatrix}b & a & b\\ a & b & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$ (avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$).

On note $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M(a,b)$.

1. Calculer le déterminant de $M(a,b)$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

2. Structure de E

2.1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$.

2.2. Donner une base et la dimension de E.

3. Etude d'un cas particulier : on pose $A = M(1,0)$.

3.1 Calculer A^2. En déduire que A est inversible et calculer simplement A^{-1}.

3.2. Que peut-on dire de l'endomorphisme $f_{1,0}$? Trouver ses éléments caractéristiques.

3.3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f_{1,0}$ est $d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans les questions suivantes on revient au cas général.

4. On pose $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,0)$ et $w = (1,1,-2)$.

4.1. Montrer que $B' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4.2. Calculer $f_{a,b}(u)$,$f_{a,b}(v)$ et $f_{a,b}(w)$. En déduire *très simplement* la matrice de $f_{a,b}$ dans la base B'.

4.3. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ à la base B'.

4.4. Expliquer comment on pourrait calculer $M(a,b)^n$ pour tout entier naturel n (on ne demande pas de détailler tous les calculs).

$\boxed{3}$ Résoudre en fonction des paramètres réels a et b le systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + ay + bz = & 0 \\ ax + y + bz = & 0 \\ x - y + z = & 0 \end{array} \right. .$$

$\boxed{4}$ Résoudre les système $\left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + kz & = 1 \\ 3x + 4y + 2z & = k+5 \\ 2x + 3y - z & = 1 \end{array} \right.$ (on discutera le nombre de solutions suivant les valeurs de k et on écrira un système échelonné par lignes équivalent).

<u>*Correction*</u> :

$\boxed{1}$ **1. a.** On immédiatement : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$. Donc $A^k = 0$ pour tout entier $k \geq 3$.

1. b. Il s'ensuit que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$S_n(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $S = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a. On a $A^2 = 3A$ et par une récurrence évidente on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = 3^{k-1}A$.

2. b. Pour tout entier $n \geq 1$ on a donc : $S_n(A) = I + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{k!} A = I + \frac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!}\right) A$.

2. c. On a $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!} = -1 + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}$ qui converge vers $-1 + e^3$.

On a donc $S = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n(A) = I + \frac{e^3-1}{3} A = \begin{pmatrix} \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ 0 & \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{e^3+2}{3} \end{pmatrix}$.

3. a. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, donc on a bien $A^2 - 2A + I = 0$.

3. b. Récurrence sur k. Soit la propriété $P(k)$: "$A^k = kA - (k-1)I$".

Cette propriété est vraie pour $k = 0$.

Si elle est vraie pour un entier k fixé, on a : $A^{k+1} = A^k A = (kA - (k-1)I)A$, soit $A^{k+1} = kA^2 - (k-1)A = k(2A - I) - (k-1)A = 2kA - kI - kA + A = (k+1)A - kI$, donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = kA - (k-1)I$.

On a donc $S_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{kA-(k-1)I}{k!} = -\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}\right) I + \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{k!}\right) A$, soit :

$$\boxed{S_n(A) = -\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}\right) I + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\right) A}.$$

3. c. On a $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!} = -1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{k!}\right) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right)$. Dans le sigma les termes se simplifient 2 à deux et il reste : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!} = -1 + 1 - \frac{1}{n!}. = -\frac{1}{n!}$.

3. d. On a $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$, suite qui converge vers e.

Comme $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$ on a $S = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n(A) = eA = \begin{pmatrix} 3e & -e & e \\ 2e & 0 & e \\ -2e & e & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ 1. On a $\det M(a,b) = \begin{vmatrix} 0 & a-b & b \\ a-b & 0 & b \\ b-a & b-a & a \end{vmatrix}$ ($C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$), donc $\det M(a,b) = (a-b)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & b \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & -1 & a+b \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}$ ($L_2 \leftarrow L_2 + L_3$) et en développant par rapport à la première colonne : $M(a,b) = -(a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & b \\ -1 & a+b \end{vmatrix}$ soit $\boxed{M(a,b) = -(a-b)^2 (a+2b}$

On a $M(a,b)$ inversible ssi $\det M(a,b) \neq 0$ ssi $(a-b)^2(a+2b) \neq 0$ ssi $a \neq b$ *et* $a \neq -2b$.

2. 1. E est non vide (il contient la matrice nulle); pour α et β réels et $M(a,b)$ et $M(a',b')$ dans E on a $\alpha M(a,b) + \beta M(a',b') = M(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b') \in E$ donc E est un sev de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$.

Autre façon : on a $M(a,b) = aM(1,0) + bM(0,1)$ pour tous réels a et b donc E est le sous-espace vectoriel engendré par $J = M(1,0)$ et $K = M(0,1)$.

2.2. Pour tous réels a et b on a $M(a,b) = aJ + bK$ avec $J = M(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = M(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc (J,K) est une famille génératrice de E. De plus elle est libre ($aJ + bK = 0$ ssi $M(a,b) = 0$ ssi $a = b = 0$) donc c'est une base de E et $\boxed{\dim E = 2}$.

3.1. On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $A^2 = I_3$ (matrice identité de $M_{\mathbb{R}}(3,3)$).

Cela équivaut à A inversible de $A^{-1} = A$.

3.2. D'après 3.1/ on $f_{1,0}^2 = Id$ donc $f_{1,0}$ *est une symétrie.*

$X = (x,y,z)$ est invariant ssi $\begin{cases} x & = y \\ y & = x \\ z & = z \end{cases}$ ce qui équivaut à $x-y = 0$; l'ensemble des vecteurs invariants est donc le plan F d'équation $x - y = 0$.

$X = (x,y,z)$ est transformé en son opposé ssi $\begin{cases} x & = -y \\ y & = -x \\ z & = -z \end{cases}$ ce qui équivaut à $z = 0$ et $x = -y$. L'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé est donc $G = \{(t,-t,0)/t \in \mathbb{R}/\}$ (droite vectorielle de base $(1,-1,0)$).

$f_{1,0}$ est donc la symétrie par rapport au plan F et parallèlement à la droite G.

3.3. Soit (e_1, e_2) une base du plan F et $e_3 = (1,-1,0)$ base de G. Alors $(e_1 e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base la matrice de $f_{1,0}$ est $d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (car $f_{1,0}(e_i) = e_i$ pour $i = 1,2$ et $f_{1,0}(e_3) = e_3$).

4.1. On vérifie facilement que le système (u,v,w) est libre; comme il a 3 élément dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

4.2. On a $M(a,b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ a+2b \\ a+2b \end{pmatrix}$ donc $f_{1,0}(u) = (a+2b)\,u$; de même $M(a,b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f_{1,0}(v) = (b-a)\,v$ et $M(a,b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a-b \\ 2b-2a \end{pmatrix}$ donc $f_{1,0}(w) = (a-b)\,w$.

Il en résulte que $\boxed{Mat(f_{a,b}, B', B') = D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}}$.

4.3. On a $P = P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.4. On a $D = P^{-1}M(a,b)\,P$ donc $M(a,b) = PDP^{-1}$ et par récurrence on a $[M(a,b)]^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} (a+2b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (b-a)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ Le système s'écrit sous forme matricielle $\begin{pmatrix} 1 & a & b & \vdots & 0 \\ a & 1 & b & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ et équivaut aux systèmes $\begin{pmatrix} 1 & a & b & \vdots & 0 \\ 0 & a^2-1 & b(a-1) & \vdots & 0 \\ 0 & a+1 & b-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{c} L_2 \leftarrow aL_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \right)$ si $a \neq 0$.

Si $a \neq 1$ et $a \neq 0$: le système équivaut à $\begin{pmatrix} 1 & a & b & \vdots & 0 \\ 0 & a+1 & b & \vdots & 0 \\ 0 & a+1 & b-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ $(L_2 \leftarrow \frac{L_2}{a-1})$, puis à $\begin{pmatrix} 1 & a & b & \vdots & 0 \\ 0 & a+1 & b & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_2 - L_3)$. Sa seule solution est $(0,0,0)$.

Si $a = 1$: le système équivaut à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & b-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$. Dans la deuxième équation on prend $z = t$ comme paramètre et on obtient $y = -\frac{b-1}{2}t$ et $x = -y - bz = \frac{b-1}{2}t - bt = -\frac{1+b}{2}t$.

Dans ce cas on a une infinité de solutions : $S = \left\{ \left(-\frac{1+b}{2}t, -\frac{b-1}{2}t, t \right) \right\}$.

Si $a = 0$: le système équivaut à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & b & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$, puis à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & b & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & b-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_1 - L_2)$, qui équivaut à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & b & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$, qui a une unique solution $(0,0,0)$.

$\boxed{4}$ On a $\left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + kz & = 1 \\ 3x + 4y + 2z & = k+5 \\ 2x + 3y - z & = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + kz & = 1 \\ -2y + (2-3k)z & = k+2 \\ -y - (2k+1)z & = -1 \end{array} \right.$ $\left(\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right)$

$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + kz & = 1 \\ -2y + (2-3k)z & = k+2 \\ (k+4)z & = k+4 \end{array} \right.$ $(L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3)$, qui est système échelonné par ligne.

<u>1er cas</u> : $k \neq -4$. Le système a une solution unique, le triplet $(1+3k, -2k, 1)$.

<u>2ième cas</u> : $k = -4$. Le système équivaut à $\left\{ \begin{array}{ll} x + 2y - 4z & = 1 \\ -y + 7z & = -1 \end{array} \right.$. En prenant $z = t$ pour paramètre, le système a une infinité de solution : $\{(10t-1, 1+7t, t)\}$.