$\boxed{\textbf{NCG1}}$ Soit $ABCD$ un parallélogramme.

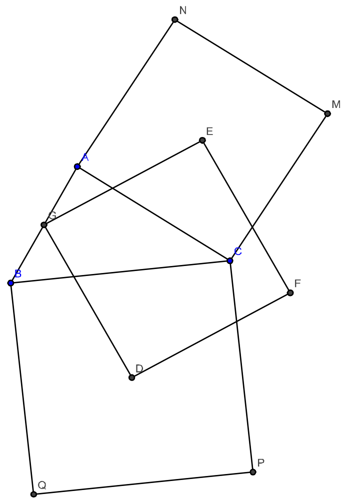
On construit à l'extérieur les carrés $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ et $ADD'A'$. Soient P, Q, R, S leur centres respectifs.

On note a, b, c, d, p, q, r, s les affixes respectives des points A, B, C, D, P, Q, R, S.

1. Montrer que $p = \dfrac{a - ib}{1 - i}$.

2. Montrer que $PQRS$ est un carré.

On construit à l'extérieur d'un triangle ABC les carrés $BCPQ$ et $ACMN$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On note D et E les centres respectifs de ces carrés. On note G le milieu de $[AB]$ et F le milieu de $[MP]$.

Soient a, b et c les affixes des points A, B et C.

Calculer les affixes g, p, m, e, d et f des points G, P, M, D et F.

Montrer que $EGDF$ est un carré.[ex12.2012]

Corrigé : On a $\boxed{g = \frac{a+b}{2}}$. Par la rotation $r_{C,\frac{\pi}{2}}$ de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, B a pour image P, ce qui se traduit par $p - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - c)$, d'où $\boxed{p = c + i(b - c)}$.

De même $r_{C,\frac{\pi}{2}}(M) = A$, soit $a - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(m - c)$, d'où $\boxed{m = c + i(c - a)}$.

E étant le milieu de $[AM]$, on a $e = \frac{a+m}{2}$ soit $\boxed{e = \frac{a+c+i(c-a)}{2}}$. De même D étant le milieu de $[BP]$ on $d = \frac{b+p}{2}$ soit $\boxed{d = \frac{b+c+i(b-c)}{2}}$ et $F =$ milieu de $[MP]$ donc $\boxed{f = \frac{m+p}{2} = \frac{2c+i(b-a)}{2}}$.

2. On a $z_{\overrightarrow{EG}} = g - e = \frac{b-c-i(c-a)}{2}$ et $z_{\overrightarrow{FD}} = d - f = \frac{b-c-i(c-a)}{2}$ donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FD}$ et le quadrilatère $EGDF$ est un parallèlogramme. Pour montrer que c'est un carré il suffit de montrer par exemple que $r_{E,\frac{\pi}{2}}(G) = F$ ce qui s'écrit : $z_{\overrightarrow{EF}} = iz_{\overrightarrow{EG}}$ soit $f - e = i(g - e)$. Or $f - e = \frac{c-b-i(a-c)}{2} = i(g - e)$.

Conclusion : $\boxed{EGDF \text{ est un carré}}$.