On veut retrouver grâce aux nombre complexes quelques propriétés des triangles.

Soient A, B et C trois points du plan non alignés tel que l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ soit direct. Soient a, b et c les affixes respectives de A, B et C. On pose :

$$\frac{c-a}{b-a} = R_1 e^{i\alpha}, \frac{a-b}{c-b} = R_2 e^{i\beta}, \frac{b-c}{a-c} = R_3 e^{i\gamma},$$

avec R_1, R_2 et R_3 réels strictements positifs.

1. Montrer que α, β et γ sont distincts de 0 modulo π.

2. Montrer que $\alpha + \beta + \gamma \equiv \pi\,(2\pi)$. Commentaire ?

3. Vérifier rapidement que : $R_1 e^{i\alpha} + \dfrac{1}{R_2 e^{i\beta}} = 1, R_2 e^{i\beta} + \dfrac{1}{R_3 e^{i\gamma}} = 1, R_3 e^{i\gamma} + \dfrac{1}{R_1 e^{i\alpha}} = 1.$

On suppose dans la question suivante que $AB = BC = AC$.

4. Montrer que $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$.

Montrer que $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma\,(2\pi)$.

On suppose maintenant que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$.

5. a. En utilisant 3/ montrer que $R_1 = R_2 = R_3$.

b. Montrer que α est congru à $-\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

Quelle propriété du triangle retrouve t-on dans les questions 4/ et 5/ ?

Dans la suite on prend pour repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tel que O soit le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On pose $a = R.e^{i\theta_1}, b = R.e^{i\theta_2}, c = R.e^{i\theta_3}$ $(R > 0)$.

Soit H le point d'affixe $h = a + b + c$.

6. Montrer que $(AH) \perp (BC)$.

On montrerait de même que $(BH) \perp (CA)$ et $(CH) \perp (AB)$ (on ne demande pas de le démontrer).

Quelle propriété d'un triangle retrouve t-on ?

7. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

Montrer que les point O, G et H sont alignés.

Corrigé :

1. Si $\alpha \equiv 0\,(\pi)$ alors $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0\,(\pi)$ soit $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0\,(\pi)$ et donc les points A, B, C seraient alignés. De même on montre que $\beta \not\equiv 0\,(\pi)$ et $\gamma \not\equiv 0\,(\pi)$.

2. On a $R_1 e^{i\alpha} \times R_2 e^{i\beta} \times R_3 e^{i\gamma} = \frac{c-a}{b-a} \times \frac{a-b}{c-b} \times \frac{b-c}{a-c} = -1$ donc $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} \times e^{i\gamma} = e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} \in \mathbb{R}_-^*$ (car R_1, R_2, R_3 sont > 0), soit $\alpha + \beta + \gamma \equiv \pi\,(2\pi)$.

On retrouve que la somme des angles d'un triangle vaut π.

3. On a $R_1 e^{i\alpha} + \dfrac{1}{R_2 e^{i\beta}} = \frac{c-a}{b-a} + \left(\frac{a-b}{c-b}\right)^{-1} = \frac{c-a}{b-a} + \frac{c-b}{a-b} = 1$. De même pour les deux autres relations.

4. On a $AB = |b-a|, BC = |c-b|$ et $AC = |c-a|$, donc on a $|b-a| = |c-b| = |c-a|$. Il en résulte que $R_1 = R_2 = R_3$. Les relations du 3/ s'écrivent alors : $e^{i\alpha} + e^{-i\beta} = e^{i\beta} + e^{-i\gamma} = e^{i\gamma} + e^{-i\alpha} = 1$.

En prenant la partie réelle il vient : $\cos\alpha + \cos\beta = \cos\beta + \cos\gamma = \cos\gamma + \cos\alpha = 1$ d'où $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2}$.

De même, en prenant la partie imaginaire : $\sin\alpha - \sin\beta = \sin\beta - \sin\gamma = \sin\gamma - \sin\alpha = 0$ d'où $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$.

Il en résulte que $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma\,(2\pi)$.

5. a. On a $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)(2\pi) \equiv \alpha\,(2\pi)$. De même $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \beta$ et $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \gamma\,(2\pi)$. L'hypothèse se traduit par $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma\,(2\pi)$.

En prenant les partie imaginaires dans 3/ il vient : $\sin\alpha\left(R_1 - \frac{1}{R_2}\right) = \sin\alpha\left(R_2 - \frac{1}{R_3}\right) = \sin\alpha\left(R_3 - \frac{1}{R_1}\right) = 0$.

Comme $\sin\alpha \neq 0$ alors on a $R_1 - \frac{1}{R_2} = R_2 - \frac{1}{R_3} = R_3 - \frac{1}{R_1} = 0$, ou $R_1R_2 = R_2R_3 = R_3R_1$ d'où on déduit que $R_1 = R_2 = R_3$.

b. Comme $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma\,(2\pi)$ on a, d'après 2/ : $3\alpha \equiv \pi\,(2\pi)$ donc $\alpha \equiv \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Donc : $\alpha \equiv -\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$ ou π modulo 2π. On ne peut avoir $\alpha = \pi$ car les points A, B ne sont pas alignés. On a donc $\varphi \equiv \pm\frac{\pi}{3}\,(2\pi)$. De même pour β et γ.

On retrouve que le triangle ABC vérifie $AB = BC = AB$ (i.e. il est équilatéral) ssi il a trois angles égaux.

6. On $z_{\overrightarrow{AH}} = h - a = b + c = R.e^{i\theta_2} + R.e^{i\theta_3} = R\left(e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3}\right)$ soit $z_{\overrightarrow{AH}} = Re^{i\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_2-\theta_3}{2}} + e^{-i\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}\right) = 2R\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)e^{i\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}$ et de même $z_{\overrightarrow{BC}} = c - b = R\left(e^{i\theta_3} - e^{i\theta_2}\right) = Re^{i\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_3-\theta_2}{2}} - e^{-i\frac{\theta_3-\theta_2}{2}}\right) = 2iR\sin\left(\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}$.

On donc $z_{\overrightarrow{BC}} = \lambda i z_{\overrightarrow{AH}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ donc $(AH) \perp (BC)$.

Comme $(BH) \perp (CA)$ et $(CH) \perp (AB)$ le point H appartient aux trois hauteurs du triangle ABC : on retrouve que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

7. L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $g = \frac{a+b+c}{3}$ (écrire au besoin : $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$). Donc $3g = a + b + c = h$ ce qui s'écrit vectoriellement : $\boxed{3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}}$.

Les points O, G et H sont donc alignés.