Exercices Nombres Complexes et Géométrie

$\boxed{1}$ On construit sur les côtés du triangle ABC et à l'extérieur les carrés $BCPQ$ et $ACMN$.

On note D et E les centres respectifs de ces carrés. On note G le milieu de $[AB]$ et F le milieu de $[MP]$. Soient a, b et c les affixes des points A, B et C.

1. Calculer les affixes g, p et m des points G, P et M en fonctions de a, b et c.

En déduire les affixes des points E et D en fonction de a, b et c.

2. Montrer que $EGDF$ est un carré.

$\boxed{2}$ Soit F l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $F(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

On note f l'application du plan P privé de O dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = F(z)$ (autrement dit, $z' = F(z)$ est l'écriture complexe de f).

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de F. Montrer que F a deux points invariants. On appelera A le point invariant de f dont l'affixe a une partie réelle positive et B l'autre point invariant.

2. Soient M et M' les point d'affixe z et $z' = F(z)$, distincts de A et B.

Montrer que $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)(2\pi)$.

En déduire très simplement l'image du cercle de diamètre $[AB]$ par f.

Pour $r \in \mathbb{R}_+$ on note (C_r) le cercle de centre O et de rayon r.

3. Quelle est l'image de (C_1) par f ?

4. Pour $r \neq 1$ montrer que l'image de (C_r) par f est une ellipse dont on donnera les éléments caractéristiques.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on note Δ_α la droite passant par O et de pente α et $\Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha - \{O\}$.

5. Montrer que l'image de Δ_α^* par f est la courbe d'équation

$$x^2 - \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Préciser la nature de cette courbe et ses éléments caractéristiques.

$\boxed{3}$ *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ on considère trois points A, B et C d'un cercle de centre O et de rayon r.

Mettre sous forme exponentielle les affixes a, b et c des points A, B et C.

Montrer que le point H d'affixe $h = a + b + c$ est l'orthocentre du triangle ABC.

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme orienté dans le sens direct.

Sur chacun de ses côtés et à l'extérieur de $ABCD$ on construit quatre carrés de centre P, Q, R et S (voir figure).

Montrer que $PQRS$ est un carré.

$\boxed{4}$ Soit $ABCD$ un parallélogramme orienté dans le sens direct.

Sur chacun de ses côtés et à l'extérieur de $ABCD$ on construit quatre carrés de centre P, Q, R et S.

Dans un repère orthonormé direct d'origine A on note b, c et d les affixes des points B, C et D.

a. Calculer les affixes p, q, r et s des points P, Q, R et S en fonction de b, c et d.

b. Montrer que $PQRS$ est un carré.

Correction :

$\boxed{1}$ **1.** On a $\boxed{g = \frac{a+b}{2}}$. Par la rotation $r_{C,\frac{\pi}{2}}$ de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, B a pour image P, ce qui se traduit par $p - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-c)$, d'où $\boxed{p = c + i(b-c)}$.

De même $r_{C,\frac{\pi}{2}}(M) = A$, soit $a - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(m-c)$, d'où $\boxed{m = c + i(c-a)}$.

E étant le milieu de $[AM]$, on a $e = \frac{a+m}{2}$ soit $\boxed{e = \frac{a+c+i(c-a)}{2}}$. De même D étant le milieu de $[BP]$ on $d = \frac{b+p}{2}$ soit $\boxed{d = \frac{b+c+i(b-c)}{2}}$ et F = milieu de $[MP]$ donc $f = \frac{m+p}{2} = \frac{2c+i(b-a)}{2}$.

2. On a $z_{\overrightarrow{EG}} = g - e = \frac{b-c-i(c-a)}{2}$ et $z_{\overrightarrow{FD}} = d - f = \frac{b-c-i(c-a)}{2}$ donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FD}$ et le quadrilatère $EGDF$ est un parallèlogramme. Pour montrer que c'est un carré il suffit de montrer par exemple que $r_{E,\frac{\pi}{2}}(G) = F$ ce qui s'écrit : $z_{\overrightarrow{EF}} = iz_{\overrightarrow{EG}}$ soit $f - e = i(g-e)$. Or $f - e = \frac{c-b-i(a-c)}{2} = i(g-e)$.

Conclusion : $\boxed{EGDF \text{ est un carré}}$.

$\boxed{2}$ **1.** Pour $Z \in \mathbb{C}$ donné l'équation $f(z) = Z$ (d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$) est équivalente à $z^2 - 2Zz + 1 = 0$. Elle a une unique solution si $\Delta = 4(Z^2-1) = 0$, soit $Z = \pm 1$, et 2 solutions sinon si $\Delta \neq 0$.

L'application F est donc surjective et non injective.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ on a $F(z) = z \iff z + \frac{1}{z} = 2z \iff z^2 - 1 = 0 \iff z = 1$. F a donc deux points fixes : 1 et -1. L'application f a donc deux points fixes : A et B d'affixes respectives 1 et -1.

2. Pour $M \neq A$ et $M \neq B$ on a, modulo 2π : $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) \equiv \arg\left(\frac{-1-z'}{1-z'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}\right) \equiv \arg\left[\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right]$, soit $\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) \equiv 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)(2\pi)$.

Soit C le cercle de diamètre $[AB]$. On a, pour $M \neq A$ et $M \neq B$: $M \in C \iff \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(\pi) \iff \left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) \equiv \pi(2\pi)$ d'après l'égalité précédente. C'est équivalent $M \in]AB[$. Comme $f(A) = A$ et $f(B) = B$ on donc $\boxed{f(C) = [AB]}$.

3. D'après la question précédente on a $f(C_1) = [AB]$.

4. Les points de (C_r) ont pour affixe re^{it} $(t \in \mathbb{R})$ donc les points de $f(C_r)$ ont pour affixes $F(re^{it})$. On a $F(re^{it}) = \frac{1}{2}\left(re^{it} + \frac{1}{r}e^{-it}\right) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t$. $f(C_r)$ est donc l'ensemble des points M de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos t, \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t\right)$. On reconnaît des équation paramétriques de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ et $b = \frac{1}{2}\left|r - \frac{1}{r}\right|$. On a $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$; $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{r+1/r} = \frac{2r}{r^2+1}$. Les foyers sont donc les points A et B.

5. La droite Δ_α^* a pour équation $y = \alpha x$ donc les points de Δ_α^* ont pour affixe $t + i\alpha t$ $(t \neq 0)$ donc les points de $f(\Delta_\alpha^*)$ ont pour affixes $F(t + i\alpha t) = \frac{1}{2}\left(t + i\alpha t + \frac{1}{t+i\alpha t}\right)$, soit $F(t+i\alpha t) = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{t(1+\alpha^2)} + i\alpha\left(t - \frac{1}{t(1+\alpha^2)}\right)\right]$. $f(\Delta_\alpha^*)$ est donc l'ensemble des points M de coordonnées $\left(x(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t(1+\alpha^2)}\right), y(t) = \frac{\alpha}{2}\left(t - \frac{1}{t(1+\alpha^2)}\right)\right)$.

Les coordonnées de ces points vérifient $x^2 - \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{1}{1+\alpha^2}$ (E).

On a donc $f(\Delta_\alpha^*) \subset H$, courbe d'équation $x^2 - \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{1}{1+\alpha^2}$. Une rapide étude des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ montre que $f(\Delta_\alpha^*) = H$.

L'équation (E) est équivalente à $\frac{x^2}{\frac{1}{1+\alpha^2}} - \frac{y^2}{\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}} = 1$.

(H) est donc une hyperbole avec $a = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $b = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = 1$. L'excentricité est $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1+\alpha^2}$; les foyers sont les points A et B; directrices d'équation $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{1}{1+\alpha^2}$; asymptotes d'équation $y = \pm\alpha x$.

$\boxed{3}$ **1.** Comme A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon r on a $a = re^{i\alpha}$, $b = re^{i\beta}$ et $c = re^{i\gamma}$ (avec α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$).

On a $z_{\overrightarrow{AH}} = h-a = b+c = r\left(e^{i\beta}+e^{i\gamma}\right) = re^{i\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}\right] = 2re^{i\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$.

De même $z_{\overrightarrow{CB}} = b-c = r\left(e^{i\beta}-e^{i\gamma}\right) = re^{i\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)}\left[e^{i\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}\right] = 2ire^{i\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$.

On a donc : $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{AH}}}\right) \equiv \arg\left(i\tan\frac{\beta-\gamma}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$. On a donc $(AH) \perp (BC)$, i.e. H appartient à la hauteur du triangle ABC issue de A.

On montre de même que H appartient aux deux autres hauteurs du triangle ABC donc H est l'orthocentre du trianble ABC.

2. Soient p, q, r et s les affixes des points P, Q, R et S. Par rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$ le point B a pour image A ce qui donne en terme de nombres complexes : $a-p = e^{i\pi/2}(b-p)$, soit $p = \frac{a-ib}{1-i}$.

De même on a $q = \frac{b-ic}{1-i}$, $r = \frac{c-id}{1-i}$ et $s = \frac{d-ia}{1-i}$.

On a donc $z_{\overrightarrow{PQ}} = q-p = \frac{b-a-ic+ib}{1-i} = \frac{b-a+i(b-c)}{1-i}$ et $z_{\overrightarrow{PS}} = s-p = \frac{d-a+i(b-a)}{1-i}$.

De plus $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ soit $d-a = c-b$ donc $z_{\overrightarrow{PS}} = \frac{c-b+i(b-a)}{1-i}$ donc $iz_{\overrightarrow{PQ}} = z_{\overrightarrow{PS}}$.

Cela se traduit par $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ et $PQ = PS$.

De plus $q-p = r-s = \frac{b-a+i(b-c)}{1-i}$ donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc $PQRS$ est un carré.

$\boxed{4}$ **a.** Soients p, q, r et s les affixes des points P, Q, R et S. Par rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$ le point B a pour image A ce qui donne en terme de nombres complexes : $a-p = e^{i\pi/2}(b-p)$, soit $\boxed{p = \frac{a-ib}{1-i} = \frac{-ib}{1-i}}$ (car $a=0$).

De même on a $\boxed{q = \frac{b-ic}{1-i}}$, $\boxed{r = \frac{c-id}{1-i}}$ et $\boxed{s = \frac{d-ia}{1-i} = \frac{d}{1-i}}$.

b. On a donc $z_{\overrightarrow{PQ}} = q-p = \frac{b-ic+ib}{1-i} = \frac{b+i(b-c)}{1-i}$ et $z_{\overrightarrow{PS}} = s-p = \frac{d+ib}{1-i}$.

De plus $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ soit $d = c-b$ donc $z_{\overrightarrow{PQ}} = \frac{b-id}{1-i}$ donc $iz_{\overrightarrow{PQ}} = z_{\overrightarrow{PS}}$.

Cela se traduit par $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ et $PQ = PS$.

De plus $q-p = r-s = \frac{b-id}{1-i}$ donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ donc $PQRS$ est un carré.