Exercices Nombres Complexes

$\boxed{1}$ Calculer les sommes : $C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\ a + k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(\ a + k\theta)$

On pourra considérer $\Sigma = C + iS$.

$\boxed{2}$ Pour n entier naturel ≥ 2 soit l'équation $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^n = 1$.

1. Sans résoudre cette équation montrer que toutes les solutions ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

2. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. On mettra les solutions sous forme algébriques.

$\boxed{3}$ Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible, $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2 Déterminer les racines carrées de $8+6i$ sous forme algébrique.

En déduire tous les antécédents de $-1+i$ par f.

3. Soit Z un nombre complexe. Discuter, suivant les valeurs de Z, le nombre d'antécédents de Z par f.

4. La fonction f est-elle surjective de D dans $\mathbb{C}$? Injective ? Justifier.

$\boxed{4}$ Pour α réel distinct de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ calculer les sommes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k \alpha} \text{ et } S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{\cos^k \alpha}$$

$\boxed{5}$ **1.** Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1 \iff z \in \mathbb{R}.$$

2. Soit a un nombre complexe et n un entier naturel non nul.

Montrer que l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a$ admet toutes ses solutions dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $|a| = 1$.

Dans ce cas résoudre l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a$ (on posera $a = e^{i\alpha}$ et on simplifiera l'écriture des solutions).

$\boxed{6}$ **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ et mettre les solutions sous forme exponentielle.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^{2n} + \left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n + 1 = 0$.

On mettra les solutions sous forme algébrique et on vérifiera qu'elles ont toutes une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.

$\boxed{7}$ **1.** Trouver les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $-3-4i$.

2. Résoudre l'équation (E) $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$ dans $\mathbb{C}$ sachant qu'il y-a une racine imaginaire pure.

$\boxed{8}$ **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

(i) $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$. On écrira les solutions sous forme exponentielle.

(ii) $\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^n = e^{i\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

2. En déduire la résolution de l'équation (E') $\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^n + (z-1)^n = 2\cos(\alpha)$.

$\boxed{9}$ **1.** Mettre le nombre complexe $\xi = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(1-i)}$ sous forme exponentielle.
En déduire les racines n-ièmes ξ_k de ξ.
2. Soit $f(z) = \dfrac{1-iz}{1+iz}$ de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$.
Montrer que f est bijective et préciser f^{-1}.
3. En utilisant les deux questions précédentes, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1-iz)^n\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) = (1+iz)^n\left(1+i\sqrt{3}\right).$$

Montrer que les solutions sont réelles et simplifier leurs écritures (on posera $\xi_k = e^{i\alpha_k}$).

$\boxed{10}$ **1.** Soit α réel nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2z\cos(\alpha) + 1 = 0.$$

On mettra les solutions sous forme exponentielle.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \not\equiv 0\,(\pi)$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{i\alpha}.$$

On montrera que les solutions sont imaginaires pures et on les écrira sous la forme ix (avec $x \in \mathbb{R}$).
3. En utilisant les question précédentes, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 2\cos\alpha.$$

<u>*Correction*</u> :
$\boxed{1}$ **1.** Posons $\Sigma = C + iS$. On aura alors $C = \operatorname{Re}\Sigma$ et $S = \operatorname{Im}\Sigma$.
D'autre part $\Sigma = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\cos(\ a+k\theta) + i\sin(\ a+k\theta)\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(a+k\theta)} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ik\theta}$.
Les formules du binôme de Newton et d'Euler donnent :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{ik\theta} = \left(1+e^{i\theta}\right)^n = \left[e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}\right)\right]^n = 2^n e^{ni\theta/2}\cos^n\left(\tfrac{\theta}{2}\right).$$

Finalement $\Sigma = 2^n e^{i(a+n\theta/2)}\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$, d'où $\boxed{C = \operatorname{Re}\Sigma = 2^n\cos\left(a+\frac{n\theta}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
et $\boxed{S = \operatorname{Im}\Sigma = 2^n\sin\left(a+\frac{n\theta}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

$\boxed{2}$ **1.** Si le complexe z est solution de l'équation $\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1$ on a, en prenant le module des deux membres : $\left|\frac{z}{z-1}\right|^n = 1$, soit $\left|\frac{z}{z-1}\right| = 1$ ou encore $|z| = |z-1|$. Soient A et M les points du plan d'affixes 1 et z respectivement. Cette dernière relation s'écrit $OM = AM$ soit M appartient à la médiatrice du segment $[0A]$ i.e. $\operatorname{Re}(r) = \frac{1}{2}$ (faire un schéma !).
2. Posons $Z = \frac{z}{z-1}$. L'équation est équivalente à $Z^n = 1$ dont les solutions sont $\omega_k = e^{i\frac{2i\pi k}{n}}$ $(0 \leq k \leq n-1)$, racines n-ièmes de 1 dans $\mathbb{C}$.

L'équations est équivalente à $\frac{z}{z-1}=\omega_k$ soit $z\left(\omega_k-1\right)=\omega_k$; cela équivaut à $z=\frac{\omega_k}{\omega_k-1}$ et $\omega_k\neq 1$. Les solutions de l'équation sont donc $z=\frac{\omega_k}{\omega_k-1}$ avec $1\leq k\leq n-1$.

On peut écrire $\frac{\omega_k}{\omega_k-1}=\frac{e^{i\frac{2i\pi k}{n}}}{e^{i\frac{2i\pi k}{n}}-1}=\frac{e^{i\frac{2i\pi k}{n}}}{e^{i\frac{i\pi k}{n}}\left(e^{i\frac{i\pi k}{n}}-e^{-i\frac{i\pi k}{n}}\right)}=\frac{e^{i\frac{i\pi k}{n}}}{2i\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}=\boxed{\frac{1}{2}-i\frac{\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi k}{n}\right)}=z_k}$ pour $1\leq k\leq n-1$.

$\boxed{3}$ **1.** La fonction f est définie sur $\mathbb{C}-\{2i\}$.

2. Le complexe $z=x+iy$ (x et y réels) est racine carrée de $8+6i$ ssi $(x+iy)^2=8+6i$ ce qui équivaut à $x^2-y^2+2ixy=8+6i$ soit le système $x^2-y^2=8$ **(1)** et $2xy=6$ **(2)**. De plus en prenant le module des deux membres de l'équation $(x+iy)^2=8+6i$ on obtient la relation supplémentaire : $x^2+y^2=\sqrt{8^2+6^2}=10$ **(3)**. De **(1)** et de **(3)** on déduit par addition et soustraction $x=\pm 3$ et $y=\pm 1$. L'équation **(2)** indique que x et y ont même signe et finalement les deux racines carrée de $8+6i$ sont $\pm\left(3+i\right)$.

Le complexe z est antécédent de $-1+i$ ssi $f\left(z\right)=-1+i$ ce qui équivaut à $\frac{z^2}{z-2i}=-1+i$ soit $z^2+\left(1-i\right)z-\left(2+2i\right)=0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta=\left(1-i\right)^2+4\left(2+2i\right)=8+6i$. Les solutions de cette équation sont donc $z=\frac{-1+i\pm(3+i)}{2}$ soit $1+i$ ou -2 qui sont les deux antécédents de $-1+i$ par f.

3. Le complexe z est antécédent de Z ssi $f\left(z\right)=Z$ ce qui équivaut à $\frac{z^2}{z-2i}=Z$, soit $z^2-Zz+2iZ=0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta=Z^2-8iZ=Z\left(Z-8i\right)$. Si $Z=0$ ou $Z=8i$ l'équation a une seule solution donc Z a un unique antécédent et si $Z\neq 0$ et $Z\neq 4i$, Z a deux antécédents.

4. D'après 3. tout nombre complexe a au moins un antécédent donc f est surjective; comme $-1+i$ (par exemple) a deux antécédents f n'est par injective.

$\boxed{4}$ Posons $\Sigma=S_1+iS_2$.

On a $\Sigma=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k\alpha}+i\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\sin(k\alpha)}{\cos^k\alpha}=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k\alpha}+i\frac{\sin(k\alpha)}{\cos^k\alpha}\right)$, soit $\Sigma=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{\cos(k\alpha)+i\sin(k\alpha)}{\cos^k\alpha}\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\right)^k$. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q=\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}$.

Si $q\neq 1$ ce qui équivaut à $\sin\alpha\neq 0$ ou $\alpha\not\equiv 0\,(\pi)$ on a $\Sigma=\frac{1-\left(\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{i\alpha}}{\cos\alpha}}=\frac{1}{\cos^n\alpha}.\frac{\cos^{n+1}\alpha-e^{i(n+1)\alpha}}{\cos\alpha-e^{i\alpha}}$.

soit $\Sigma=\frac{1}{\cos^n\alpha}.\frac{\cos^{n+1}\alpha-e^{i(n+1)\alpha}}{-i\sin\alpha}=\frac{\sin(n+1)\alpha+i\left[\cos^{n+1}\alpha-\cos(n+1)\alpha\right]}{\sin\alpha\cos^n\alpha}$.

On a alors : $\boxed{S_1=\mathrm{Re}\left(\Sigma\right)=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha}}$ et $\boxed{S_2=\mathrm{Im}\left(\Sigma\right)=\frac{\cos^{n+1}\alpha-\cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha\cos^n\alpha}}$.

Si $\alpha\equiv 0\,(2\pi)$ on a $\cos\left(k\alpha\right)=1$ et $\sin\left(k\alpha\right)=0$ pour tout entier k donc $S_1=n+1$ et $S_2=0$.

Si $\alpha\equiv\pi\,(2\pi)$ on a $\cos\left(k\alpha\right)=\left(-1\right)^k$ et $\sin\left(k\alpha\right)=0$ et on a aussi $S_1=n+1$ et $S_2=0$.

$\boxed{5}$ **1.** En posant $z=x+iy$ (x et y réels) on a : $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|=1\iff\left|1+iz\right|=\left|1-iz\right|$ $\iff\left|(1-y)+ix\right|^2=\left|(1+y)-ix\right|^2\iff(1-y)^2+x^2=(1+y)^2+x^2\iff-2y=2y$ ce qui équivaut à $y=0$ ou z imaginaire pur.

Solution géométrique : $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|=1\iff\left|i\left(z-i\right)\right|=\left|-i\left(z+i\right)\right|\iff\left|z-i\right|=\left|z+i\right|$; si on note A, B et M les points d'affixes i, $-i$ et z c'est équivalent à $AM=BM$ soit M appartient à la médiatrice de $[AB]$ qui est égal à l'axe des imaginaires pur, soit z imaginaire pur.

2. $\Longrightarrow$: soit $z=x\in\mathbb{R}$ solution de $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n=a$; en prenant le module des deux membres il vient : $\left|\dfrac{1+ix}{1-ix}\right|^n=|a|$, soit $\left(\dfrac{|1+ix|}{|1-ix|}\right)^n=|a|$; comme $|1+ix|=|1-ix|=\sqrt{1+x^2}$ on a $|a|=1$.

$\Longleftarrow$: réciproquement, si $|a| = 1$ et si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a$ on a, en prenant le module des deux membres : $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$ soit $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ donc z est réel d'après 1/.

Conclusion : l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a$ admet toutes ses solutions dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $|a| = 1$.

En posant $a = e^{i\alpha}$ l'équation $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a$ équivaut à $Z = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ et $Z^n = e^{i\alpha}$.

Les solutions de cette dernière équation sont les n racines n-ièmes de $e^{i\alpha}$, soit $Z_k = \omega_k = e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $0 \le k \le n-1$ (les n racines n-ièmes de $e^{i\alpha}$).

D'autre part on a : $\dfrac{1+iz}{1-iz} = \omega_k \Longleftrightarrow 1 + iz = \omega_k (1 - iz)$ et $iz \neq 1$

$\Longleftrightarrow iz(1+\omega_k) = \omega_k - 1$ et $z \neq -i$.

C'est équivalent à $z = z_k = i\frac{1-\omega_k}{1+\omega_k}$ si $\omega_k \neq -1$.

D'autre part, en posant $\theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, on a : $z_k = i\frac{1-e^{i\theta_k}}{1+e^{i\theta_k}} = i\frac{e^{i\frac{\theta_k}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta_k}{2}} - e^{i\frac{\theta_k}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta_k}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta_k}{2}} + e^{i\frac{\theta_k}{2}}\right)} = i\frac{-2i\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}$

soit $\boxed{z_k = \tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $0 \le k \le n-1$.

$\boxed{6}$ **a.** Le discriminant de l'équation est $\Delta = 1 - 4 = -3$. On a donc deux racines complexes $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, ou $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

b. L'équation équivaut à $Z = \left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n$ et $Z^2 + Z + 1 = 0$.

D'après a/ ce système équivaut à $Z = \left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n = e^{i\alpha}$, avec $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$.

On a : $\left(\dfrac{z-1}{z}\right)^n = e^{i\alpha} \Longleftrightarrow \dfrac{z-1}{z} = e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ $(0 \le k \le n-1)$. En posant $\alpha_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ c'est équivalent à $z\left(1 - e^{i\alpha_k}\right) = 1$, soit $z = \frac{1}{1-e^{i\alpha_k}}$ (car $e^{i\alpha_k} \neq 1$).

D'autre part on a : $z = \frac{1}{1-e^{i\alpha_k}} = \frac{1}{e^{i\frac{\alpha_k}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha_k}{2}} - e^{i\frac{\alpha_k}{2}}\right)} = \frac{e^{-i\frac{\alpha_k}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\frac{\cos\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_k}{2}\right)}$.

En définitive, les solutions de l'équation sont $z_k = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$ et $0 \le k \le n-1$.

$\boxed{7}$ **1.** $x+iy$ est racine de $-3-4i$ ssi $(x+iy)^2 = -3-4i$ (1) ce qui équivaut à $x^2 - y^2 + 2ixy = -3-4i$, soit $\begin{cases} x^2 - y^2 & = -3 \\ xy & = -2 \end{cases}$. En prenant le module des deux membres de (1) on obtient l'équation supplémentaire $x^2 + y^2 = 5$. Par addition et soustraction de cette équation avec $x^2 - y^2 = -3$ on obtient $x^2 = 1$ et $y^2 = 4$, soit $x = \pm 1$ et $y = \pm 2$. Comme $xy < 0$ on obtient $x + iy = 1 - 2i$ ou $-1 + 2i$.

2. Le nombre complexe ai $(a \in \mathbb{R})$ est solution de $(E) \Longleftrightarrow (ai)^3 - (5+3i)(ai)^2 + (7+16i)ai + 3 - 21i = 0 \Longleftrightarrow (5a^2 - 16a + 3) + i(-a^3 + 3a^2 + 7a - 21) = 0$

$\Longleftrightarrow (5a^2 - 16a + 3 = 0$ et $-a^3 + 3a^2 + 7a - 21 = 0)$

Les solutions de $5a^2 - 16a + 3 = 0$ sont 3 ou $1/5$. Seule 3 vérifie la seconde équation.

Donc $a = 3$ et $3i$ est solution de (E).

Il existe donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = (z - 3i)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$.

On a immédiatement $\alpha = 1$ (termes en z^3) et $3 - 21i = -3i\gamma$ (termes constants) soit $\gamma = 7 + i$.

En examinant les termes en z^2 on obtient : $-(5+3i)=\beta-3i$, soit $\beta=-5$.

On a donc $z^3-(5+3i)\,z^2+(7+16i)\,z+3-21i=(z-3i)\left(z^2-5z+7+i\right)$.

Résolution de (E) : $(E)\iff(z-3i)\left(z^2-5z+7+i\right)=0\iff z-3i=0$ ou $z^2-5z+7+i=0$.

Le discriminant de $z^2-5z+7+i=0$ est $\Delta=25-4\,(7+i)=-3-4i\neq 0$.

D'après 1/ les solutions de $z^2-5z+7+i=0$ sont $\frac{5\pm(1-2i)}{2}$, soit $3-i$ ou $2+i$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{S=\{3i,3-i,2+i\}}$.

$\boxed{8}$ **1. (i)** Le discriminant de l'équation est $\Delta=4\cos^2(\alpha)-4=-4\sin^2(\alpha)$. Une racine carrée de Δ dans $\mathbb{C}$ est $\delta=2i\sin(\alpha)$ donc les solutions de $z^2-2\cos(\alpha)\,z+1=0$ sont $\frac{2\cos(\alpha)\pm 2i\sin(\alpha)}{2}=e^{\pm i\alpha}$.

(ii) On a $\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^n=e^{i\alpha}\iff\dfrac{1}{z-1}$ est racine n-ième de $e^{i\alpha}\iff\dfrac{1}{z-1}=\omega_k=e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ $(0\leq k\leq n-1)$.

On a $\dfrac{1}{z-1}=\omega_k\iff 1=\omega_k\,(z-1)\iff z\omega_k=\omega_k+1$, soit $z=1+\frac{1}{\omega_k}$.

L'ensemble des solutions de $\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^n=e^{i\alpha}$ est donc $S=\left\{z_k=1+e^{-i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}/0\leq k\leq n-1\right\}$.

2. En posant $Z=\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^n$ on a $(E')\iff Z+\frac{1}{Z}=2\cos(\alpha)\iff Z^2-2\cos(\alpha)\,Z+1=0$, dont les solutions sont $Z=e^{\pm i\alpha}$ (1/ i/). D'après (ii) les solutions de $Z=\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^n=e^{i\alpha}$ sont $z_k=1+e^{-i\alpha_k}$ (avec $\alpha_k=\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}$) et celles de $\left(\dfrac{1}{z-1}\right)^n=e^{-i\alpha}$ sont $z_k=1+e^{-i\alpha_k}$ et $0\leq k\leq n-1$.

L'ensemble des solutions de (E') est donc $\boxed{S=\left\{1+e^{\pm i\alpha_k}/0\leq k\leq n-1\right\}}$.

$\boxed{9}$ **1.** On a $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\sqrt{2}\,(1-i)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $\xi=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$ soit $\boxed{\xi=e^{i\frac{7\pi}{12}}}$.

Les n racines n-ièmes de ξ sont donc $\boxed{\xi_k=e^{i\left(\frac{7\pi}{12n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}}$ avec k entier tel que $0\leq k\leq n-1$.

2. Résolvons l'équation $\dfrac{1-iz}{1+iz}=Z$: (E) avec $Z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ donné et d'inconne $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$.

On a $(E)\iff 1-iz=Z\,(1+iz)\iff iz\,(Z+1)=1-Z\iff z=i\frac{Z-1}{Z+1}$ (car $Z\neq-1$).

L'équation (E) ayant une unique solution, f est bijective.

Sa bijection réciproque est l'application f^{-1} de $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ définie par $\boxed{f^{-1}(Z)=i\frac{Z-1}{Z+1}}$.

3. L'équation est équivalent à $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^n=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(1-i)}=\xi$, soit, d'après 1/ : $\dfrac{1-iz}{1+iz}=\xi_k$, ou $f(z)=\xi_k$.

D'après 2/ les solutions de cette équation sont $z_k=f^{-1}(\xi_k)=i\frac{\xi_k-1}{\xi_k+1}$ avec $0\leq k\leq n-1$.

En posant $\xi_k=e^{i\alpha_k}$ on a $z_k=i\dfrac{e^{i\alpha_k}-1}{e^{i\alpha_k}+1}=i\dfrac{e^{i\alpha_k/2}\left(e^{i\alpha_k/2}-e^{-i\alpha_k}\right)}{e^{i\alpha_k/2}\left(e^{i\alpha_k}+e^{-i\alpha_k}\right)}=i\dfrac{2i\sin(\alpha_k/2)}{2\cos(\alpha_k/2)}=-\tan\left(\dfrac{\alpha_k}{2}\right)$ qui sont réels.

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\boxed{S=\left\{-\tan\left(\dfrac{\alpha_k}{2}\right)/0\leq k\leq n-1\right\}}$ et $\alpha_k=\frac{7\pi}{12n}+\frac{2k\pi}{n}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ **1.** Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 4\cos^2(\alpha) - 4 = 4(\cos^2(\alpha) - 1) = -4\sin^2(\alpha)$.

Si $\Delta = 0$, i.e. $\alpha \equiv 0\,(\pi)$ l'équation a une unique solution $z = \cos\alpha = \pm 1$.

Si $\Delta \neq 0$, i.e. $\alpha \not\equiv 0\,(\pi)$ une racine carrée du discriminant est $\delta = 2\sin(\alpha)\,i$ et l'équation a deux solutions : $z = \cos(\alpha) \pm \sin(\alpha) = e^{\pm i\alpha}$.

2. En posant $Z = \frac{z+1}{z-1}$ l'équation s'écrit $Z^n = e^{i\alpha}$ dont les solutions sont les n racines $n-$ièmes de $e^{i\alpha}$, c'est à dire : $\omega_k = e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec $0 \leq k \leq n-1$.

Les solutions de l'équation sont les solutions de $\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$, soit $z(\omega_k - 1) = \omega_k + 1$ Les solutions de l'équations sont donc $z_k = \frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}$ ($\omega_k \neq 1$ car $e^{i\alpha} \neq \pm 1$) avec $0 \leq k \leq n-1$.

En posant $\omega_k = e^{i\theta_k}$ on a $z_k = \dfrac{e^{i\theta_k}+1}{e^{i\theta_k}-1} = \dfrac{e^{i\theta_k/2}\left(e^{i\theta_k/2}+e^{i\theta_k/2}\right)}{e^{i\theta_k/2}\left(e^{i\theta_k/2}-e^{-i\theta_k/2}\right)} = \frac{2\cos(\theta_k/2)}{2i\sin(\theta_k/2)} = -i\frac{\cos(\theta_k/2)}{\sin(\theta_k/2)}$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

3. Avec $Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$ on obtient $Z + \frac{1}{Z} = 2\cos(\alpha)$, soit $Z^2 - 2Z\cos(\alpha) + 1 = 0$.

D'après 1/ les solutions de cette équation sont $Z = e^{\pm i\alpha}$ donc les solutions de l'équation sont les solutions de l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{\pm i\alpha}$, soit $z = -i\frac{\cos(\theta_k/2)}{\sin(\theta_k/2)}$ avec $\left(\pm\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$ et $0 \leq k \leq n-1$.