Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on tire successivement au hasard et avec remise $n+1$ boules. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Par exemple, si $n=5$, si on obtient le tirage $5,3,2,2,5,3$ alors $X=4$.

1. Préciser l'univers Ω et son cardinal.

Quelles sont les valeurs prises par X ?

Partie I

Dans cette partie *uniquement* on prend $n=3$.

2. A quels tirage correspond l'événement $X=4$?

En déduire $P(X=4)$.

3. Montrer que $P(X=2)=\dfrac{2}{3}$. En déduire que $P(X=3)=\dfrac{8}{27}$.

4. Calculer l'espérance de X.

Partie II

Dans toute cette partie n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

5. Calculer $P(X=2)$.

6. Soit $k\in[[2,n]]$. Expliciter les tirages correspondant à l'événement $X>k$.

En déduire que $P(X>k)=\dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k=0$ et pour $k=1$.

7. Montrer que $E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X>k)$. En déduire que $E(X)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

8. Pour $k\in[[2,n+1]]$, exprimer $P(X=k)$ à l'aide de $P(X>k-1)$ et $P(X>k)$.

9. Montrer que : $\forall k\in[[2,n+1]]\,,P(X=k)=\dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Correction :

Partie I

1. On peut prendre pour univers Ω l'ensemble des $n+1$-liste des n boules (il y a des répétitions et l'ordre compte puisque les tirages se font successivement).

On a donc $|\Omega|=n^{n+1}$.

Les valeurs prises par X sont $2,3,\ldots,n+1$.

Remarque : les tirages se faisant au hasard on est dans le cas d'équiprobabilité.

Partie I

2. L'événement $X=4$ correspond au tirage $(3,2,1,i)$ avec $i=1,2,3$. Le nombre de cas favorable est donc 3 et le nombre de cas possible est $3^4=81$, donc $\boxed{P(X=4)=\frac{3}{3^4}=\frac{1}{27}}$.

3. L'événement $X=2$ correspond au tirage commençant par $(1,1)\,,(1,2)\,,(1,3)\,,(2,2)\,,(2,3)\,,(3,3)$, les deux autres tirages étant arbitraires. Le nombre de cas favorables est donc 6×3^2, donc $\boxed{P(X=2)=\frac{6\times 3^2}{3^4}=\frac{2}{3}}$.

Comme $P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$, on en déduit que $P(X=3)=1-\frac{1}{27}-\frac{2}{3}$ soit $\boxed{P(X=3)=\frac{8}{27}}$.

4. On a $E(X)=\sum_{k=2}^{4} kP(X=k)=2\times\frac{2}{3}+3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{1}{27}$, soit $\boxed{E(X)=\frac{64}{27}}$.

Partie 2

5. L'événement $X=2$ correspond aux tirages commençant par i,j avec $i\leq j$ et $i,j\in\{1,2,\ldots n\}$.

Pour $i=1$ il y-a n façons de choisir j ($j=1,2,\ldots,n$), pour $i=2$ il y-a $n-1$ façons de choisir j ($j=2,3,\ldots,n$) etc, pour $i=n$ il y-a 1 façons de choisir j ($j=n$) donc le nombre de couples (i,j) avec $i\leq j$ est $n+(n-1)+\ldots+1=\frac{n(n+1)}{2}$. Le nombre de façons de choisir les $n-1$ autres boules est n^{n-1} donc le nombre de cas favorables de l'événement $X=2$ est $\frac{n(n+1)}{2}\times n^{n-1}$, donc $P(X=2)=\frac{n(n+1)n^{n-1}}{2n^{n+1}}$, soit $\boxed{P(X=2)=\frac{n+1}{2n}}$.

6. L'événement $X>k$ correspond aux tirages dont les numéros des k premières boules constituent une suite strictement décroissante de $\{1,2,\ldots,n\}$: il y a $\binom{n}{k}$ de telles suites (voir devoir 21). Le nombre de façons de choisir les $n+1-k$ autres boules est n^{n+1-k}, donc le nombre de cas favorables de l'événement $X>k$ est $\frac{\binom{n}{k}\times n^{n+1-k}}{n^{n+1}}$, soit $\boxed{P(X>k)=\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}}$.

On a $P(X>0)=P(X>1)=1$ donc la formule précédent est valable pour $k=0$ et $k=$ ($n^0=1$, $\binom{n}{0}=1$ et $\binom{n}{1}=1$).

7. On écrit :

$$\begin{aligned}
P(X>0) &= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\ldots+P(X=n+1)\\
P(X>1) &= \qquad\qquad\quad\; P(X=2)+P(X=3)+\ldots+P(X=n+1)\\
&\;\;\vdots\\
P(X>n) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; P(X=n+1)
\end{aligned}$$

En sommant membres à membres il vient $\sum_{k=0}^{n} P(X>k)=P(X=1)+2P(X=2)+\ldots+(n+1)P(X=n+1)$, soit $\boxed{\sum_{k=0}^{n} P(X>k)=E(X)}$.

D'après 6/ on a donc $E(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$. D'après la formule du binôme on a $E(X)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

8. On a $P(X=k)=P(X>k-1)-P(X>k)$.

9. On a donc, d'après 8/, $P(X=k)=\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1}-\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}=\frac{1}{n^k}\left[\frac{n\times n!}{(k-1)!(n-k+1)!}-\frac{n!}{k!(n-k)!}\right]$.

Le crochet est égal à $\frac{n\times n!\times k-n!\times(n-k+1)}{k!(n+k+1)!}=\frac{n!(nk-n+k-1)}{k!(n+k+1)!}=\frac{n!(n+1)(k-1)}{k!(n+k+1)!}=\frac{(n+1)!(k-1)}{k!(n+k+1)!}$, d'où $P(X=k)=\frac{k-1}{n^k}\times\frac{(n+1)!}{k!(n+k+1)!}$, soit $\boxed{P(X=k)=\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}}$.