On dispose d'une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile est $p \in [0,1]$ et de deux urnes : l'urne A contient 4 boules rouges et 12 blanches et l'urne B contient 8 boules rouges et 8 blanches.

On lance la pièce n fois de suite ($n \in \mathbb{N}^*$). Après chaque lancer on choisit une boule dans l'urne A ou B comme expliqué dans les parties 1 et 2 puis on remet la boule dans son urne d'origine.

<u>Partie 1</u>

Dans cette partie, à chaque lancer de la pièce, la boule est tirée dans l'urne A si la pièce indique pile, sinon on elle est tirée dans l'urne B.

Soit l'événement R_k : "obtenir une boule rouge au k-ième tirage.

1. Calculer la probabilité de R_k.

Soit X la variable aléatoire "nombre de boules rouges tirées à l'issue des n lancers de la pièce".

2. Quelle est la loi de probalilité de X ?

3. Calculer l'espérance de X.

<u>Partie 2</u>

Dans cette partie l'urne dans laquelle on tire la boule après chaque tirage est choisie de la façon suivante :

- à l'issue du premier lancer de la pièce, la boule est tirée dans l'urne A si la pièce indique pile, sinon on elle est tirée dans l'urne B;

- à l'issue des lancers suivants, si la boule obtenue est blanche on choisit l'urne comme au premier lancer, sinon on fait le contraire : on choisit l'urne B si pile sort sinon on choisit l'urne A.

Soit l'événement R_k : "obtenir une boule rouge au k-ième tirage.

4. Montrer que $P_{R_k}(R_{k+1}) = \frac{p+1}{4}$ et $P_{\overline{R_k}}(R_{k+1}) = \frac{2-p}{4}$.

On pose $p_k = P(R_k)$.

5. Montrer que $p_1 = \frac{2-p}{4}$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_{k+1} = \frac{2p-1}{4} p_k + \frac{2-p}{4}.$$

Quelle est la nature de la suite (p_k) ? En déduire l'expression de p_k en fonction de k et de p.

Soit X la variable aléatoire "nombre de boules rouges tirées à l'issue des n lancers de la pièce".

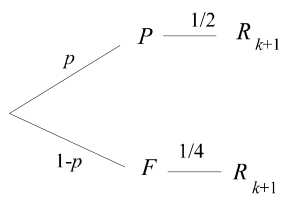
Soit X_k la variable aléatoire valant 1 si on a tiré une boule rouge au k-ième tirage et 0 sinon.

6. Calculer l'espérance de X_k puis l'espérance de X en fonction de p et de n.

<u>*Correction*</u> :

<u>Partie 1</u>

1. Au k-ième tirage la pièce indique face (F) ou pile donc $\left(F, \overline{F}\right)$ est un système complet d'événements, et d'après la formule des probabilités totales on a $P(R_k) = P(F) \times P_F(R_k) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(R_k)$.



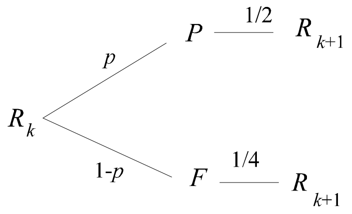
On a $P\left(F\right)=1-p$, $P_F\left(R_k\right)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, $P_{\overline{F}}\left(R_k\right)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, donc $P\left(R_k\right)=\left(1-p\right).\frac{1}{2}+p.\frac{1}{4}$ donc $\boxed{P\left(R_k\right)=\frac{2-p}{4}}$.

2. On répète n l'expérience et on obtient à chaque fois une boule rouge ou une boule blanche. Les tirages étant indépendants X suit loi binômiale de paramètres $\left(n,\frac{2-p}{4}\right)$. Pour $k\in\{0,\ldots,n\}$ on a donc $P\left(X=k\right)=\binom{k}{n}\left(\frac{2-p}{4}\right)^k\left(1-\frac{2-p}{4}\right)^{n-k}$, soit $\boxed{P\left(X=k\right)=\frac{1}{4^n}\binom{k}{n}\left(2-p\right)^k\left(2+p\right)^{n-k}}$.

3. On a $\boxed{E\left(X\right)=n\times\frac{2-p}{4}}$.

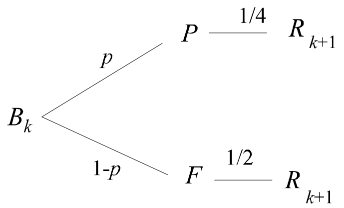
<u>Partie 2</u>

4. Si on tire une boule rouge au k-ième tirage on obtient l'arbre suivant :



Comme en 1/ on obtient par la formule de probabilités totales : $P_{R_k}\left(R_{k+1}\right)=p.\frac{1}{2}+\left(1-p\right).\frac{1}{4}=\frac{p+1}{4}$.

Si on tire une boule blanche au k-ième tirage on obtient l'arbre suivant :



On obtient de même $P_{\overline{R_k}}\left(R_{k+1}\right)=p.\frac{1}{4}+\left(1-p\right).\frac{1}{2}=\frac{2-p}{4}$.

5. D'après 1/ on a $p_1=\frac{2-p}{4}$.

Le système $\left(R_k,\overline{R_k}\right)$ étant un système complet d'événement on a $P\left(R_{k+1}\right)=P\left(R_k\right)\times P_{R_k}\left(R_{k+1}\right)+P\left(\overline{R_k}\right)\times P_{\overline{R_k}}\left(R_{k+1}\right)$, soit $p_{k+1}=p_k\times\frac{p+1}{4}+\left(1-p_k\right)\times\frac{2-p}{4}$, soit $\boxed{p_{k+1}=\frac{2p-1}{4}p_k+\frac{2-p}{4}}$.

$\left(p_k\right)$ est une suite arithmético-géométrique. On a $p_{k+1}=f\left(p_k\right)$ avec $f\left(x\right)=\frac{2p-1}{4}x+\frac{2-p}{4}$.

Cherchons les points fixes de f : on a $f\left(x\right)=x\Leftrightarrow\frac{2p-1}{4}x+\frac{2-p}{4}=x\Leftrightarrow x=\frac{2-p}{5-2p}$. La suite $\left(p_k-\frac{2-p}{5-2p}\right)$ est une suite géometrique de raison $\frac{2p-1}{4}$ d'où $p_k-\frac{2-p}{5-2p}=\left(\frac{2p-1}{4}\right)^{k-1}\left(p_1-\frac{2-p}{5-2p}\right)$ soit $\boxed{p_k=\frac{2-p}{5-2p}\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}\right)^k\right]}$.

6. X_k est une variable aléatoire de Bernouilli et $E\left(X_k\right)=1\times P\left(X_k=1\right)+0\times P\left(X_k=0\right)=P\left(X_k=1\right)=p_k$.

On a $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ et par linéarité de l'espérance : $E\left(X\right)=E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+\ldots+E\left(X_n\right)$, soit $E\left(X\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2-p}{5-2p}\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}\right)^k\right]=\frac{2-p}{5-2p}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[1-\left(\frac{2p-1}{4}\right)^k\right]=\frac{2-p}{5-2p}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}1-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2p-1}{4}\right)^k\right]$, donc $E\left(X\right)=\frac{2-p}{5-2p}\left[n-\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2p-1}{4}\right)^k\right]$. $S=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2p-1}{4}\right)^k$ est la somme d'une suite géometrique de raison $\frac{2p-1}{4}$ et de premier terme $\frac{2p-1}{4}$ sont $S=\frac{2p-1}{4}.\frac{1-\left(\frac{2p-1}{4}\right)^n}{1-\frac{2p-1}{4}}$ d'où $\boxed{E\left(X\right)=\frac{2-p}{5-2p}\left[n-\frac{2p-1}{4}.\frac{1-\left(\frac{2p-1}{4}\right)^n}{1-\frac{2p-1}{4}}\right]}$.