

PEV2 Soit φ l'application qui à tout élément P de $\mathbb{R}[X]$ associe le polynôme Q tel que

$$Q(X) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Calculer $\varphi(X^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et son degré.

En déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul on a :

$$\begin{aligned} d^\circ \varphi(P) &= d^\circ \varphi(P) + 1 \text{ si } d^\circ P \neq 2 \text{ et} \\ d^\circ \varphi(P) &\leq 2 \text{ si } d^\circ P = 2 \end{aligned}$$

On cherche des polynômes *non nuls* P tels qu'il existe un réel λ tel que $\varphi(P) = \lambda P$.

3. Montrer que P est nécessairement de degré 2.

4. On suppose dans cette question que $\lambda = 3$. Montrer que $2P = (X + 1)P'$.

Montrer que -1 est racine de P . Comment s'écrit P ?

En déduire que les polynômes P tels que $\varphi(P) = 3P$ sont $P = \alpha(X + 1)^2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. On suppose que $\lambda = -1$. Montrer que 1 est racine de P .

En déduire que les polynômes P tels que $\varphi(P) = -P$ sont $P = \alpha(X - 1)^2$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. On suppose que λ est distinct de 3 et de -1 .

Montrer que 1 et -1 sont racines de P . Montrer que $\lambda = 1$ et trouver les polynômes P tels que $\varphi(P) = P$.

On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$.

7. Montrer que la restriction f de φ à E définit un endomorphisme de E .

8. En utilisant les questions précédentes montrer simplement que $\ker f = \{0\}$.

Que peut-on en déduire pour f ?

9. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique $B = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$?

10. On pose $P_1 = (X + 1)^2$, $P_2 = (X - 1)^2$ et $P_3 = X^2 - 1$.

Montrer que $B' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E .

Calculer $f(P_1)$, $f(P_2)$ et $f(P_3)$ en fonction de P_1, P_2, P_3 et en déduire *très simplement* la matrice D de f dans la base B' .

11. Quelle est la matrice de passage P de la base B à B' ? Calculer P^{-1} .

12. Déduire des questions précédentes le calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrigé :

1. On vérifie facilement que φ est linéaire; comme elle va de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Si $p \geq 1$ on a $\varphi(X^p) = (2X + 1)X^p - (X^2 - 1)pX^{p-1} = (2 - p)X^{p+1} + X^p + pX^{p-1}$ et $\varphi(1) = 2X + 1$.

Donc $d^\circ \varphi(X^p) = p + 1$ si $p \neq 2$ et $d^\circ \varphi(X^p) = 2$ si $p = 2$.

Si $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ avec $d^\circ P = p$ (donc $a_p \neq 0$) alors $\varphi(P) = \sum_{k=0}^p a_k \varphi(X^k)$. Or $d^\circ \varphi(X^k) = k + 1$ si $k \neq 2$ et $d^\circ \varphi(X^k) = 2$ si $k = 2$ donc $d^\circ \varphi(P) = d^\circ P + 1$ si $d^\circ P \neq 2$ et $d^\circ \varphi(P) \leq d^\circ P$ si $d^\circ P = 2$.

3. Si $\varphi(P) = \lambda P$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\varphi(P)$ et P sont de même degré. Or, d'après 2/ le degré de $\varphi(P)$ est égal à $d^\circ P + 1$ si $d^\circ P \neq 2$. On a donc $\boxed{d^\circ P = 2}$.

4. On a $\varphi(P) = 3P$ ssi $(2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X) = 3P$ soit $2(X - 1)P(X) = (X^2 - 1)P'(X)$. Le polynôme $X - 1$ n'étant pas nul c'est équivalent à $2P = (X + 1)P'$.

Il en résulte que -1 est racine de P .

Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]/P = (X+1)Q$. Comme $d^\circ P = 2$ on a $d^\circ Q = 1$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/Q(X) = \alpha X + \beta$, soit $P = (X+1)(\alpha X + \beta)$.

On a alors : $2P = (X+1)P' \iff 2(X+1)(\alpha X + \beta) = (X+1)P' \iff 2(\alpha X + \beta) = P' = \alpha X + \beta + \alpha(X+1) \iff \alpha = \beta$.

On a donc $\boxed{P = \alpha(X+1)^2}$.

5. On a de même $\varphi(P) = -P$ ssi $(2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X) = -P$ soit $2(X+1)P(X) = (X^2-1)P'(X)$. Le polynôme $X+1$ n'étant pas nul c'est équivalent à $2P = (X-1)P'$ et 1 est racine de P .

Comme précédemment : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/P = (X-1)(\alpha X + \beta)$.

On a $2P = (X-1)P' \iff 2(X-1)(\alpha X + \beta) = (X-1)P' \iff 2(\alpha X + \beta) = P' = \alpha X + \beta + \alpha(X-1)$ ce qui équivaut à $\alpha = \beta$ soit $\boxed{P = \alpha(X-1)^2}$.

6. On a $\varphi(P) = \lambda P \iff (2X+1-\lambda)P(X) = (X^2-1)P'(X)$.

Si λ est distinct de 3 et de -1, $2X+1-\lambda$ ne s'annule pas pour $X = \pm 1$ donc d'après la relation précédente, P s'annule pour $X = \pm 1$.

On a donc $P = \alpha(X-1)(X+1) = \alpha(X^2-1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ (car $d^\circ P = 2$).

Réciproquement : $\varphi(P) = \alpha(2X+1)(X^2-1) - (X^2-1)P' = (X^2-1)(2\alpha X + \alpha - 2\alpha X) = P$.

On a donc $\boxed{\lambda = 1 \text{ et } P = \alpha(X^2-1)}$.

7. φ étant linéaire, il en est de même de f . D'après 2/, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $\in \mathbb{R}_2[X]$, donc f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. On a $\varphi(P) = 0 = 0.P$ ssi $P = 0$ d'après les questions 4/ 5/ 6/, donc $\ker f = \{0\}$.

f est donc injective et comme c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension finie, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

9. On a $f(1) = 1 + 2X$, $f(X) = (2X+1)X - (X^2-1) = 1 + X + X^2$ et $f(X^2) = (2X+1)X^2 - 2(X^2-1)X = 2X + X^2$. D'où la matrice de f dans la base $B = (1, X, X^2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

10. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0$, soit $\alpha(X+1)^2 + \beta(X-1)^2 + \gamma(X^2-1) = 0$. En remplaçant successivement X par -1 puis 1 on obtient $\alpha = \beta = 0$. On a donc $\gamma(X^2-1) = 0$ d'où $\gamma = 0$. Le système (P_1, P_2, P_3) est libre. Comme il a trois éléments et que $E = \mathbb{R}_2[X]$ est de dimension trois, c'est une base de E .

D'après les questions 4/ 5/ 6/ on a immédiatement $f(P_1) = 3P_1$, $f(P_2) = -P_1$ et $f(P_3) =$

P_3 . D'où la matrice de f dans la base $B' = (P_1, P_2, P_3)$: $\boxed{D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

11. On a $P_1 = 1 + 2X + X^2$, $P_2 = 1 - 2X + X^2$, $P_3 = -1 + X^2$, d'où la matrice de passage

de la base B à B' : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Pour calculer P^{-1} on résout le système : $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x - 2y \\ z' = x + y + z \end{cases} (S)$. On a $(S) \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_1 + L_3}$

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x - 2y \\ x' + z' = 2x + 2y \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_2 + L_3} \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x - 2y \\ x' + y' + z' = 4x \end{cases}, \text{ d'où on déduit : } \boxed{P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

12. On a $D = P^{-1}AP$ d'où $A = PDP^{-1}$ et par une récurrence facile on a : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.