Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Soient a_1, a_2 et a_3 trois réels distincts deux à deux et soient Q_1, Q_2 et Q_3 trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $Q_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ et $Q_i(a_i) = 1$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Montrer que (Q_1, Q_2, Q_3) est un système libre de $\mathbb{R}_2[X]$.

On pose $P_1 = \frac{1}{8}(X-3)(X-5)$, $P_2 = -\frac{1}{4}(X-1)(X-5)$, $P_3 = \frac{1}{8}(X-1)(X-3)$.

2. Calculer $P_i(1)$, $P_i(3)$ et $P_i(5)$ pour $i = 1, 2, 3$.

En déduire que $B' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Déterminer la matrice de passage A de la base B à la base B'.

4. Montrer que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$ les coordonnées de Q dans la base $B' = (P_1, P_2, P_3)$ sont $(Q(1), Q(3), Q(5))$.

5. Déduire *très simplement* de la question précédente le calcul de A^{-1} (sans résoudre de système).

Soit P_0 un polynôme donné de $\mathbb{R}[X]$ donné.

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on note $\widehat{P}$ le reste de la division euclidienne de P par P_0.

On note f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe $\widehat{P}$.

6. Montrer que f est linéaire.

Dans la suite on pose $P_0 = (X-1)(X-3)(X-5)$.

7. Montrer que f induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ (c'est à dire que l'application $P \longmapsto \widehat{P}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$). On continue à le noter f dans la suite.

8. Déterminer le noyau et l'image de f.

9. Comparer f^2 et f. Donner la nature de f et donner ses éléments caractéristiques.

Correction :

1. Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha Q_1(X) + \beta Q_2(X) + \gamma Q_3(X) = 0$. En remplaçant X par a_1 il reste $\alpha = 0$ (car $Q_1(a_1) = 1$ et $Q_2(a_1) = Q_2(a_1) = 0$). De même en remplaçant X par a_2 puis par a_3 on trouve $\beta = \gamma = 0$ donc le système (Q_1, Q_2, Q_3) est libre.

2. On trouve $P_i(1) = 1$ si $i = 1$ et 0 si $i = 2, 3$.

De même $P_i(3) = 1$ si $i = 2$ et 0 si $i = 1, 3$ et $P_i(5) = 1$ si $i = 3$ et 0 si $i = 1, 2$.

D'après la question 1/ le système (P_1, P_2, P_3) est libre; comme il possède 3 éléments c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (car $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$).

3. On a $P_1(X) = \frac{1}{8}(X^2 - 8X + 15)$, $P_2(X) = -\frac{1}{4}(X^2 - 6X + 5)$ et $P_3(X) = \frac{1}{8}(X^2 - 4X + 3)$,donc

$$\boxed{A = P_B^{B'} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ -8 & 12 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

4. Si $Q(X) = \alpha Q_1(X) + \beta Q_2(X) + \gamma Q_3(X)$ on a, en remplaçant X par 1, $\alpha = Q(1)$; de même on $\beta = Q(3)$ et $\gamma = Q(5)$ en remplaçant X par 3 puis 5.

5. A^{-1} est la matrice de passage de la base B' à la base B. D'après la question précédente les coordonnées de $1, X, X^2$ dans la base B' sont respectivement $(1,1,1), (1,3,9), (1,5,25)$ donc :

$$A^{-1} = P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 9 & 25 \end{pmatrix}.$$

6. Soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a alors : $P_1 = P_0 Q_1 + \widehat{P_1}$ avec $d^\circ \widehat{P_1} < 2$ $P_2 = P_0 Q_2 + \widehat{P_2}$ avec $d^\circ \widehat{P_2} < 2$, donc $\alpha P_1 + \beta P_2 = P_0(\alpha Q_1 + \beta Q_2) + \alpha \widehat{P_1} + \beta \widehat{P_2}$. Comme

$d^\circ\left(\alpha\widehat{P_1}+\beta\widehat{P_2}\right)\leq\max\left(d^\circ\widehat{P_1},d^\circ\widehat{P_2}\right)<2$ alors $\alpha\widehat{P_1}+\beta\widehat{P_2}$ est le reste de la division euclidienne de $\alpha P_1+\beta P_2$ par P_0 donc $f\left(\alpha P_1+\beta P_2\right)=\alpha\widehat{P_1}+\beta\widehat{P_2}=\alpha f\left(P_1\right)+\beta f\left(P_2\right)$ et donc f est linéaire.

7. Si $P\in\mathbb{R}_3\left[X\right]$ le reste de la division de P par $P_0=\left(X-1\right)\left(X-3\right)\left(X-5\right)$ est de degré <3 donc $f\left(P\right)\in\mathbb{R}_3\left[X\right]$.

Comme f est linéaire elle induit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3\left[X\right]$.

8. On a $P\in\ker f$ ssi le reste de la division euclidienne de P par P_0 est nul ce qui équivaut à dire que P est un multiple de P_0. Comme $d^\circ P\leq 3$ on a donc :

$$\ker f=\left\{CP_0/C\in\mathbb{R}\right\}.$$

C'est donc la droite vectorielle engendrée par P_0 et $\dim\ker f=1$.

D'après le théorème du rang on a : $4=\dim\mathbb{R}_3\left[X\right]=\dim\ker f+rgf$ donc $rgf=3$.

D'autre part le reste dans la division euclidienne d'un polynôlme par P_0 est de degré ≤ 2 donc on a $\mathrm{Im}f\subset\mathbb{R}_2\left[X\right]$. Comme $\dim\mathrm{Im}f=rgf=3=\dim\mathbb{R}_2\left[X\right]$ on a donc $\boxed{\mathrm{Im}f=\mathbb{R}_2\left[X\right]}$.

9. Si un polynôme est de degré ≤ 2 son reste dans la division euclidienne par P_0 est lui-même donc on a $f^2=f$. *f est donc une projection.*

$P\in\mathbb{R}_3\left[X\right]$ est invariant par f ssi son reste dans la division euclidienne par P_0 est lui-même ce qui équivaut $P\in\mathbb{R}_2\left[X\right]$.

En définitive f est la projection sur $\mathbb{R}_2\left[X\right]$ parallèlement à $\ker f=\left\{CP_0/C\in\mathbb{R}\right\}$.