III Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n > 0$, dont le terme de plus haut degré est X^n . On pose $e = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$.

On suppose qu'il existe $n + 1$ réels x_k ($0 \leq k \leq n$) tels que $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ et

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, |P(x_k)| = e.$$

On pose enfin $Q(X) = (P(X))^2 - e^2$ et $R(X) = (1 - X^2)(P'(X))^2$.

1. Justifier l'existence de e et montrer que $e > 0$.

2. Déterminer le degré et le terme de plus haut degré de Q et R .

3. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, x_k est racine double de Q et x_0 et x_n sont racines simples de Q et donner la décomposition de Q est produit de facteur de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$ en fonction des x_k .

4. Même questions avec R .

5. Il résulte des deux questions précédentes que $R + n^2Q = 0$. En déduire que P vérifie

$$(1 - X^2)P''(X) - XP'(X) + n^2P(X) = 0.$$

On définit une suite de polynômes (T_n) par

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n.$$

6. Calculer le degré et le terme de plus haut degré de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.

7. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in]0, \pi[, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

8. Montrer que T_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation précédente.

9. A l'aide de la question 7/ montrer que T_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et donner sa factorisation en produit de polynômes de degrés 1.

10. En dérivant deux fois la relation de la question 8/ montrer que

$$(1 - X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.$$

On veut calculer P .

11. Expliquer pourquoi il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^n \lambda_k T_k.$$

Soit l'application linéaire φ de $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(Q) = (1 - X^2)Q''(X) - XQ'(X)$.

12. Quelles sont les valeurs de $\varphi(P)$ et $\varphi(T_k)$?

Déduire des questions précédentes le calcul du polynôme P .

Correction :

1. La fonction $x \mapsto P(x)$ est continue sur l'intervalle fermé donc bornée, donc e existe (et est ≥ 0).

Si $e = 0$ on aurait $P(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, donc le polynôme P , ayant une infinité de racines, serait le polynôme nul, ce qui contredit que P est de degré $n > 0$.

2. Le terme de plus haut degré de P étant X^n , celui de Q est X^{2n} ; celui de P' est nX^{n-1} , donc celui de $(P'(X))^2$ est n^2X^{2n-2} et celui de R est donc $-n^2X^{2n}$.

3. Soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Comme $|P(x_k)| = e$, x_k est racine de Q . De plus comme P admet en $x_k \in]-1, 1[$ pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ un extremum on a $P'(x_k) = 0$. Les racines x_k ($1 \leq k \leq n-1$) sont donc au moins double, donc il existe $S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X-x_k)^2 S(X)$. Comme $d^\circ Q = 2n$ alors S est de degré 0, i.e. $S = \lambda \in \mathbb{R}^*$.

En comparant les termes en X^{2n} des deux membres on a $\lambda = 1$ donc $Q = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)^2$.

4. 1 et -1 sont racines de R et d'après la question précédente $P'(x_k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$ donc les x_k sont racines au moins double de R . Comme précédemment il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $R = \lambda (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X-x_k)^2$ (car $d^\circ R = 2n$). Le terme de plus haut degré de R étant

$-n^2 X^{2n}$ on en déduit que $\lambda = -n^2$ donc $R = -n^2 (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X-x_k)^2$.

5. En dérivant les deux membres de $R + n^2 Q = 0$ on obtient $-2XP'^2 + 2(1-X^2)P'P'' + 2n^2 PP' = 0$. En simplifiant par $P' (\neq 0)$, $-2XP' + 2(1-X^2)P'' + 2n^2 P = 0$ soit $(1-X^2)P'' - XP' + n^2 P = 0$.

6. On démontre la propriété $\mathcal{P}_n$ "le terme de plus haut degré de T_n est $2^{n-1} X^{n^2}$ ".

$\mathcal{P}_1$ est vraie. Si $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout entier naturel $1 \leq k \leq n$, on a $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ donc le terme de plus haut degré de T_{n+1} est $2X \cdot 2^{n-1} X^n = 2^n X^{n+1}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. On montre par récurrence la propriété $\mathcal{Q}_n$ " $\forall \theta \in]0, \pi[, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ ". Elle est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Si $\mathcal{Q}_k$ est vraie pour tout entier naturel $k \leq n$, on a $T_{n+1}(\cos \theta) = 2\cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta) = 2\cos \theta \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$ (hypothèse de récurrence). Or $\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos \theta + \sin(n\theta)\sin \theta$, donc $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos(n\theta)\cos \theta - \sin(n\theta)\sin \theta = \cos((n+1)\theta)$ et la propriété est vraie au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

8. Si Q_n est un autre polynôme vérifiant la relation du 8/ alors T_n et Q_n en tout point de l'intervalle $]-1, 1[$ donc en une infinité de points, donc $T_n = Q_n$.

9. D'après la relation du 8/ $T_n(\cos \theta) = 0$ si $\cos(n\theta) = 0$ soit $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ou $\theta = \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On obtient n racines distinctes deux à deux $\xi_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ de T_n pour $0 \leq k \leq n-1$. Comme T_n est de degré n il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $T_n = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$. En comparant les termes de degré n on trouve $\lambda = 2^{n-1}$

(d'après 7/) donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right]$.

10. En dérivant deux fois la relation du 8/ on trouve, pour tout $\theta \in]0, \pi[, (1 - \cos^2 \theta) T_n''(\cos \theta) - \cos \theta T_n'(\cos \theta) = -n^2 \cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos \theta)$. Les polynômes $(1 - X^2) T_n''(X) - X T_n'(X)$ et $-n^2 T_n(X)$ coïncident en une infinité de points (ceux de l'intervalle $]-1, 1[$) donc ils sont égaux, d'où $(1 - X^2) T_n''(X) - X T_n'(X) + n^2 T_n(X) = 0$.

11. Les polynômes T_k pour $0 \leq k \leq n$ sont non nuls et de degrés deux à deux distincts, donc ils forment une famille libre. Comme ce sont $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, ev de dimension $n+1$, ils constituent une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il existe donc $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ (unique) tel que $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k T_k$.

12. D'après 5/ et 11/ on a $\varphi(P) = -n^2 P$ et $\varphi(T_n) = -n^2 T_n$.

Comme $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k T_k$ on a $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi(T_k)$ (φ étant linéaire), soit $-n^2 P = -\sum_{k=0}^n \lambda_k k^2 T_k$

et d'autre part $-n^2 P = -\sum_{k=0}^n n^2 \lambda_k T_k$. La famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$ on a donc

$\lambda_k k^2 = n^2 \lambda_k$ pour $0 \leq k \leq n$, soit $(n^2 - k^2) \lambda_k = 0$ soit $\lambda_k = 0$ pour $0 \leq k \leq n - 1$.

On a donc $P = \lambda_n T_n$. Le terme de plus haut degré de T_n est $2^{n-1} X^n$ et celui de P est X^n

donc $\lambda_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ soit $P = \frac{1}{2^n} T_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left[X - \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2n} \right) \right]$.