Exercice polynômes

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et n un entier tel que $n \geq 2$. On pose

$$P_\alpha = X^{2n} - 2\cos(\alpha) X^n + 1.$$

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le polynôme P_α admet des racines multiples.
Factoriser alors P_α sur $\mathbb{C}$.

On suppose désormais que P_α n'a pas de racines multiples.

2. Chercher les racines de P_α puis factoriser P_α en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4^{n-1}\sin^2 \frac{\alpha}{2n}}.$$

En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ On veut déterminer les polynômes à coefficients réels tels que $P(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, P\left(x^2+1\right) = \left(P(x)\right)^2 + 1.$$

Pour cela on considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ pour tout entier naturel n.

1. Etudier la monotonie de (a_n).

2. Que peut-on dire de $P(a_n)$? Conclure.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère le le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par

$$A(X) = (X+1)^{2n} - 1.$$

1. Montrer que A peut s'écrire $A(X) = X.B(X)$ avec $B \in \mathbb{R}[X]$.
Calculer B. Préciser son degré, son terme de plus haut degré et son terme constant.

2. Déterminer le racines de A dans $\mathbb{C}$. On les notera $z_0 = 0, z_1, \ldots, z_{2n-1}$.
Ecrire z_k sous la forme $\lambda_k e^{i\theta_k}$ $(1 \leq k \leq 2n-1)$ avec λ_k et θ_k réels).

3. Factoriser $A(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de polynômes de degré 1.
En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **1.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Quel est le reste de la division d'un polynôme P par $X - a$?
On cherche les polynômes $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant la propriété

$$\begin{aligned} &\text{le reste de la division euclidienne de } P(X) \text{ par } X-1 \text{ est } 2 \\ &\text{et le reste de la division euclidienne de } P(X) \text{ par } X-2 \text{ est } 1. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Trouver un polynôme P_0 de degré 1 vérifiant (2).

3. Donner une condition nécessaire et suffisante concernant les racines de $P - P_0$ pour que P vérifie (2).

En déduire l'ensemble des polynômes vérifiant (2).

$\boxed{5}$ Soit le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 8$.

Sachant que P a une racine multiple, factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de polynômes irréductibles.

Correction :

$\boxed{1}$ **1.** $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine multiple de P_α ssi $P_\alpha(\lambda) = P'_\alpha(\lambda) = 0$. On a $P'_\alpha(\lambda) = 0 \iff 2n\lambda^{2n-1} - 2n\cos(\alpha)\lambda^{n-1} = 0 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda^n = \cos(\alpha)$. $\lambda = 0$ ne convient pas car 0 n'est pas racine de P_α. D'autre part si $\lambda^n = \cos(\alpha)$ on a $P_\alpha(\lambda) = \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = 1 - \cos^2\alpha$, donc, λ est racine de P_α ssi $\cos^2\alpha = 1$ soit $\alpha \equiv 0\,(\pi)$.

Finalement P_α a une racine multiple ssi $\alpha \equiv 0\,(\pi)$.

Si $\alpha \equiv 0\,(2\pi)$ on a $P_\alpha = X^{2n} - 2X^n + 1 = (X^n - 1)^2$. Les racines complexes de $X^n - 1$ sont $\omega_k = e^{2i\pi k/n}$ $(0 \leq k \leq n-1)$, racines n-ième de 1, donc $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)$ d'où $P_\alpha = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)^2$, factorisation de P_α en produit de polynômes de degré 1 (i.e. irréductibles).

Si $\alpha \equiv 0\,(\pi)$ on a $P_\alpha = X^{2n} + 2X^n + 1 = (X^n + 1)^2$. Les racines complexes de $X^n + 1$ sont $\mu_k = e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ $(0 \leq k \leq n-1)$, racines n-ième de -1, donc $X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \mu_k)$ d'où $P_\alpha = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \lambda_k)^2$.

2. On a $P_\alpha(z) = 0 \iff z^{2n} - 2\cos(\alpha) z^n + 1 = 0 \iff Z^2 - 2\cos(\alpha) Z + 1 = 0$ en posant $Z = z^n$. Les solutions de $Z^2 - 2\cos(\alpha) Z + 1 = 0$ sont $Z = e^{\pm i\alpha}$.

On obtient $z^n = e^{\pm i\alpha}$. Si $z^n = e^{i\alpha}$ on a $z = e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ $(0 \leq k \leq n-1)$ et les solutions de $z^n = e^{-i\alpha} = \overline{e^{i\alpha}}$ sont les conjugués des solutions de $z^n = e^{i\alpha}$ soit $z = e^{-i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$.

Finalement, les racines de P_α sont $\xi_k = e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ et $\overline{\xi_k} = e^{-i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Ces solutions étant distinctes deux à deux (car on a $\alpha \not\equiv 0\,(\pi)$) on a $P_\alpha = \lambda \prod_{k=0}^{n-1}(X - \xi_k) \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \overline{\xi_k}\right)$.

En comparant les termes de degré $2n$ des deux membres on a $\lambda = 1$ d'où $P_\alpha = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \xi_k)\left(X - \overline{\xi_k}\right)$, décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de P_α en produit de polynômes irréductibles. De plus $(X - \xi_k)\left(X - \overline{\xi_k}\right) = X^2 - 2\operatorname{Re}(\xi_k) X + 1 = X^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) X + 1$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ car de degré 2 sans racines réelles donc on a $\boxed{P_\alpha = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) X + 1\right)}$, décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de P_α en produit de polynômes irréductibles.

3. On a $P_\alpha(1) = 2 - 2\cos\alpha = \prod_{k=0}^{n-1}\left(2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ d'après 2/, soit $1 - \cos\alpha = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$. D'autre part, pour tout réel x, on a $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, donc $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$ d'où $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ et $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$. On a donc $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1} 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = 2^{2n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = 2^{2n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$

soit $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4^{n-1}\sin^2\frac{\alpha}{2n}}}$ $(\sin^2\frac{\alpha}{2n} \neq 0$ car $\alpha \not\equiv 0\,(k\pi))$.

Faisons tendre α vers 0 dans les deux membres de l'égalité précédente : le premier membre tend vers $\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4^{n-1}\sin^2\frac{\alpha}{2n}} \underset{0}{\sim} \frac{(\alpha/2)^2}{4^{n-1}(\alpha/2n)^2} = \frac{n^2}{4^{n-1}}$ donc on a $\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n^2}{4^{n-1}}$ soit

$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$ (car $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$).

$\boxed{2}$ **1.** Pour tout entier naturel n on a $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Conclusion : la suite (a_n) est strictement croissante.

2. Comme $a_0 = 0$ et $P(0) = 0$ on a $P(a_0) = 0$. Si $P(a_n) = a_n$ on a $P(a_n^2 + 1) = (P(a_n))^2 + 1$ (d'après l'hypothèse en remplaçant x par a_n) soit $P(a_{n+1}) = a_n^2 + 1$ ou $P(a_{n+1}) = a_{n+1}$. Par récurrence on a donc établi que $P(a_n) = a_n$ pour tout entier naturel n.

Il en résulte que les polynôme P et X prennent les mêmes valeurs en a_n. Or l'ensemble des a_n est infini (car la suite (a_n) est strictement croissante). Les polynômes P et X coïncidant en une infinité de points, il sont donc égaux : $P = X$.

Réciproquement le polynôme X vérifie bien : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x^2+1) = (P(x))^2 + 1$.

Conclusion : X est l'unique polynôme vérifiant la relation précédente.

$\boxed{3}$ **1.** On a $A(0) = 0$ donc il existe $B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A(X) = X.B(X)$.

D'après la formule du binôme on a $(X+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$, donc $A(X) = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = X.\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1}$ et $B(X) = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1}$.

Le degré de A est donc $2n-1$. Son terme de plus haut degré est X^{2n-1} et son terme constant est $\binom{2n}{1} = 2n$.

2. Pour tout complexe z on a : $A(z) = 0 \iff (z+1)^{2n} = 1 \iff Z = z+1$ et $Z^{2n} = 1$.

Les solutions de $Z^{2n} = 1$ sont $Z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$, $0 \leq k \leq 2n-1$ (racines n-ièmes de 1). Les racines de A sont donc $z_k = Z_k - 1$, soit $z_k = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1, 0 \leq k \leq 2n-1$.

On a $z_k = e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right)$, soit $\boxed{z_k = 2ie^{i\frac{k\pi}{2n}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right), 0 \leq k \leq 2n-1}$.

3. Les racines z_k étant distinctes deux à deux on a $A(X) = Q(X)\prod_{k=0}^{2n-1}(X - z_k)$. Comme d°$A = 2n$, on a d°$Q = 0$, donc Q est un scalaire non nul : $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* \ / \ A(X) = \lambda \prod_{k=0}^{2n-1}(X - z_k)$.

En comparant les termes de plus haut degré on obtient $\lambda = 1$, donc $A(X) = \prod_{k=0}^{2n-1}(X - z_k) = X.\prod_{k=1}^{2n-1}(X - z_k)$.

On en déduit : $B(X) = \prod_{k=1}^{2n-1}(X - z_k)$. En prenant $X = 0$ on obtient : $B(0) = \prod_{k=1}^{2n-1} 2ie^{i\frac{k\pi}{2n}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

En prenant le module des deux membres : $|B(0)| = 2^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1} 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right|$ (sin étant positive sur $[0, \pi]$). Comme $B(0) = 2n$, on en déduit : $\prod_{k=1}^{2n-1} 2\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right| = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2n-2}}$.

$\boxed{4}$ **1.** Q et R sont le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X-a$ ssi $P=(X-a)\,Q+R$ avec d°$R<1$. Il existe donc $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $R=\alpha$.

On a donc $P=(X-a)\,Q+\alpha$ et en remplaçant X par a il vient $\boxed{R=\alpha=P(a)}$.

2. D'après 1/, P_0 vérifie (2) ssi $P_0(1)=2$ et $P_0(2)=1$. En posant $P_0=\alpha X+\beta$ on obtient le système $\alpha+\beta=2$ et $2\alpha+\beta=1$, d'où $\alpha=-1$ et $\beta=3$, donc $\boxed{P_0=-X+3}$.

3. P vérifie (2) ssi $P(1)=2=P_0(1)$ et $P(2)=1=P_0(2)$, ce qui équivaut à dire que le polynôme $P-P_0$ a pour racine 1 et 2, ce qui équivaut à : $\exists Q\in\mathbb{R}[X]\ /\ P-P_0=(X-1)(X-2)\,Q$.

Conclusion : les polynômes vérifiants (2) sont ceux qui s'écrivent $P=(X-1)(X-2)\,Q-X+3$, avec $Q\in\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{5}$ z est racine multiple de P ssi $P(z)=P'(z)=0$.

On a $P'(z)=4z^3+6z^2-4z=2z\,(2z^2+3z-2)$. On a donc : $P'(z)=0\iff z=0$ ou $2z^2+3z-2$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta=25$ et ses racines sont -2 ou $\frac{1}{2}$.

Or 0 et $\frac{1}{2}$ ne sont pas racines de P alors que $P(-2)=0$, donc -2 est racine multiple de P.

P s'écrit donc : $P(X)=(X+2)^2\,Q(X)$ avec d° $(Q)=2$.

Il existe donc a,b,c réels tels que $P(X)=(X^2+4X+4)\,(aX^2+bX+c)$.

En identifiant les termes en X^4 : $X^4=aX^4$ donc $a=1$; en identifiant les termes constants : $8=4c$ donc $c=2$; en identifiant les termes en X^2 : $-2X^2=(c+4b+4a)\,X^2$ donc $-2=c+4b+4a$ soit $b=-2$.

On a donc $\boxed{P(X)=(X+2)^2\,(X^2-2X+2)}$ décompostion de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (car le polynôme X^2-2X+2 est de degré 2 et de discrimant <0).

Pour avoir la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ on cherche les racines de X^2-2X+2; $\Delta=-4$ donc les racines sont $1\pm i$ d'où la décompostion de P en produit de facteurs irréducibles dans $\mathbb{C}[X]$: $\boxed{P(X)=(X+2)^2\,(X-(1+i))\,(X-(1-i))}$.