$\boxed{\text{PS1}}$ **Partie A : étude d'une fonction définie par une intégrale**

Pour tout réel $x$ on pose $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

*On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.*

**1.** Justifier que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**2.** Montrer que $F$ est impaire.

**3.** Justifier que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner le tableau de variation de $F$ sur $\mathbb{R}_+$.

**4.** Montrer que pour tout réel $t$ supérieur ou égal à 1 on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

En déduire que la fonction $F$ est majorée au voisinage de plus l'infini.

**5.** Déduire des questions précédentes que $F$ a une limite finie $L$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

Le but de la suite du problème est de calculer $L = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

**Partie B : étude d'une suite**

On considère la suite $(I_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

**6.** Calculer $I_0, I_1$ et $I_2$.

Etudier le sens de variation de $(I_n)$ et montrer que $(I_n)$ est convergente.

**7.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.

**8.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

(*Indication* : intégrer par parties $\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t dt$ en écrivant $\sin^{n+2} t = \sin^{n+1} t \times \sin t$ ).

**9.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ la suite $((n+1) I_{n+1} \times I_n)$ est constante. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) I_{n+1} \times I_n = \frac{\pi}{2}.$$

**10.** Déduire de la question précédente et du sens de variation de $(I_n)$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Donner un équivalent de la suite $(I_n)$ et sa limite.

**Partie C : calcul de L**

**11.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ et tout réel $u \geq -n$ on a :

$$\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u.$$

(on pourra étudier la fonction $\varphi$ définie par $\varphi(t) = \ln(1+t) - t$ pour $t > -1$).

**12.** Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul et tout réel $t \in [0, \sqrt{n}]$ :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^n}.$$

**13.** Soit $n$ un entier naturel non nul.

**a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} I_{2n+1}$ (poser $t = \sqrt{n} \sin x$).

**b.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} x dx$ (poser $t = \sqrt{n} \tan x$).

**c.** Déduire des questions précédentes l'encadrement, pour $n \geq 2$ :

$$\sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$$

En déduire la valeur de $L = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ (notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$).

<u>*Corrigé*</u> :

**Partie A**

**1.** La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$ elle y admet des primitives et $F$ est la primitive de $f$ qui s'annule en 0.

**2.** On pose $u = -t$ dans $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ $(x \in \mathbb{R})$. On a $du = -dt$ d'où $F(x) = -\displaystyle\int_0^{-x} e^{-(-u)^2} du = -\int_0^{-x} e^{-u^2} du$, soit $F(x) = -F(-x)$ pour tout réel $x$, donc $F$ est impaire.

**3.** Comme vu à la question 1/, $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x$, on a $F'(x) = e^{-x^2} > 0$.

$F$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**4.** Pour tout réel $t$ supérieur ou égal à 1 on a $t^2 \geq t$, donc $-t^2 \leq -t$ et la fonction exp étant croissante sur $\mathbb{R}$ on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

Pour $x \geq 1$ on a donc $\displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_1^x = e^{-1} - e^{-x} \leq e^{-1}$.

En ajoutant $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2} dt$ on obtient $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + e^{-1}$, soit : $\boxed{\forall x \geq 1, F(x) \leq F(1) + e^{-1}}$.

La fonction $F$ est majorée au voisinage de plus l'infini.

**5.** La fonction $F$ étant croissante elle admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone pour les fonctions. Comme $F$ est majorée au voisinage de plus l'infini cette limite est réelle.

**Partie B**

**6.** On a $I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$ et $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\ dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $t \in [0; \pi/2]$ on a $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$ et en intégrant entre 0 et $\pi/2$ il vient $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite $(I_n)$ est décroissante.

La suite $(I_n)$ étant décroissante et minorée (par 0) elle est donc convergente.

**7.** En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$ on a $du = -dt$ et $I_n = \int_{\pi/2}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ dt$ .

**8.** On intègre $I_{n+1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{n+2}tdt$ par parties en posant $\left\{\begin{array}{c} u=\sin^{n+1}t; u'=(n+1)\sin^n t.\cos t \\ v'=\sin t; v=-\cos t \end{array}\right.$ ($u$ et $v$ étant de classe $C^1$ sur $[0;\pi/2]$) ce qui donne $I_{n+2}=\left[-\cos t\sin^{n+1}t\right]_0^{\pi/2}+(n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cos^2 tdt=(n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^n t\left(1-\sin^2 t\right)dt$ soit $I_{n+2}=(n+1)\left[\int_0^{\pi/2}\sin^n tdt-\int_0^{\pi/2}\sin^{n+2}tdt\right]$ d'où $I_{n+2}=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$, soit : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n}$.

**9.** Posons $u_n=(n+1)I_{n+1}\times I_n$ pour $n\in\mathbb{N}$. On a $u_{n+1}=(n+2)I_{n+2}\times I_{n+1}$. Or $(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$ d'après la question précédente, donc $u_{n+1}=(n+1)I_n\times I_{n+1}$ soit $u_{n+1}=u_n$.

La suite $(u_n)=((n+1)I_{n+1}\times I_n)$ est donc constante.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N},(n+1)I_{n+1}\times I_n=u_0=I_1\times I_0=\frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},(n+1)I_{n+1}\times I_n=\frac{\pi}{2}}$.

**10.** La suite $(I_n)$ étant décroissante et positive on a, pour tout $n$, $I_{n+1}^2\leq I_{n+1}\times I_n\leq I_n^2$ soit, d'après la relation précédente, $I_{n+1}^2\leq\frac{\pi}{2(n+1)}\leq I_n^2$, d'où $I_{n+1}\leq\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}\leq I_n$.

On en déduit que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}\leq I_n\leq\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$.

En posant $v_n=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ on en déduit que $\sqrt{\frac{n}{n+1}}\leq\frac{I_n}{v_n}\leq 1$ pour $n\geq 1$, donc, d'après le théorème de l'étau, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{v_n}=1$, soit $\boxed{I_n\sim v_n=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.

**Partie C : calcul de L**

**11.** La fonction $\varphi$ est dérivable pour $t>-1$ comme somme et composée de fonctions dérivables et $\varphi'(t)=\frac{1}{1+t}-1=-\frac{t}{1+t}$. $\varphi$ est donc croissant sur $]-1,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme $\varphi(0)=0$ on a $\varphi(t)\leq 0$ pour tout réel $t>-1$, soit $\ln(1+t)\leq t$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $u$ réel tel que $u>-n$ on a $\frac{u}{n}>-1$ donc $\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)\leq\frac{u}{n}$ d'après l'inégalité précédente, donc $n\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)\leq u$. En passant à l'exponentielle (croissante sur $\mathbb{R}$) on obtient $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n\leq e^u$, et cette inégalité est vraie aussi si $u=-n$ donc $\boxed{\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n\leq e^u \text{ pour } u\geq -n}$.

**12.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,\sqrt{n}]$. On a $-t^2\geq -n$ donc d'après l'inégalité précédente (avec $u=-t^2$) on a $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\leq e^{-t^2}$.

On a de même (avec $u=t^2$) on a $\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n\leq e^{t^2}$ et en passant à l'inverse $e^{-t^2}\leq\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.

*Conclusion* : $\forall t\in[0,\sqrt{n}],\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\leq e^{-t^2}\leq\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$.

**13. a.** On pose $t=\sqrt{n}\sin x$ avec $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; $dt=\sqrt{n}\cos x$; *bornes* : $t=0\to x=0, t=\sqrt{n}\to x=\frac{\pi}{2}$, d'où $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^n\sqrt{n}\cos xdx=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}xdx$,

soit, d'après 7/, $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt=\sqrt{n}I_{2n+1}}$.

**b.** On pose $t=\sqrt{n}\tan x$ avec $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ d'où $dt=\frac{\sqrt{n}}{\cos^2 x}$; *bornes* : $t=0\to x=0, t=\sqrt{n}\to x=\frac{\pi}{4}$, d'où $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{n}dx}{\cos^2 x\left(1+\tan^2 x\right)^n}$, soit $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n-2}xdx}$ (compte tenu que $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$).

**c.** En intégrant l'encadrement du 12/ entre 0 et $\sqrt{n}$ on obtient $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt\leq\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}dt\leq\int_0^{\sqrt{n}}\frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$, soit, d'après a/ et b/ : $\displaystyle\sqrt{n}I_{2n+1}\leq\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}dt\leq\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{2n-2}xdx$.

On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx = I_{2n-2}$ et finalement $\boxed{\sqrt{n} I_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2}}$.

D'après 10/ on a $I_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, donc $\sqrt{n} I_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de même $I_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n-4}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, donc $\sqrt{n} I_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'après le théorème de l'étau on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\boxed{L = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.