$\boxed{\textbf{PS3}}$ **Calcul approché de π par la méthode des arctangentes**

La question du calcul de π est un problème étudié depuis l'Antiquité. Archimède (287-212 av. J.C) est le premier à avoir proposé un algorithme de calcul en calculant le périmètre d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon $1/2$. Pour $n = 96$ on trouve $\pi \approx 3,14103$.

On propose ici une méthode différente basée sur une formule démontrée par John Machin (mathématicien né en 1680, professeur d'astronomie à Londres) en 1706. Machin a joué un grand rôle, d'abord parce que ce fut le premier à calculer 100 décimales de π au moyen de sa formule, mais surtout parce qu'il a ouvert la voie à la recherche de formules d'arctangentes.

Le premier milliard de décimale de π a été calculé en août 1989; actuellement le record est de 5000 milliards de décimales (août 2010).

1. Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n on a

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \left(1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n}\right)\right| \leq x^{2n+2}. \tag{1}$$

2. En déduire que pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier n on a

$$\left|\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Donner une majoration analogue valable pour $x \leq 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$U_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3. Montrer que la suite $U_n(x)$ est convergente pour $|x| \leq 1$ et préciser sa limite.

4. On pose $u_n = U_n(1)$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

En utilisant l'inégalité du 2/ trouver à la calcuatrice n tel que u_n soit une valeur approchée de $\frac{\pi}{4}$ à 10^{-8} près. Peut-on envisager d'utiliser cette suite pour le calcule approché de π ? Expliquer.

Dans la suite on veut obtenir un algorithme d'approximation de π plus performant.

5. a. Montrer que pour tout pour tout réel x positif ou nul on a

$$0 \leq \arctan x \leq x.$$

(on pourra, par exemple, utiliser le théorème des accroissements finis).

b. On pose $\theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$. Calculer $\tan(3\theta)$ et $\tan(4\theta)$ sous forme de fraction irréductible.

En déduire que

$$3\theta < \frac{\pi}{4} < 4\theta.$$

c. Calculer sous forme de fraction irréductible $\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right)$. En déduire la formule de J. Machin (1706)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}.$$

d. On veut calculer une valeur approchée de π à 10^{-8}. Déterminer les entiers p et q tels que

$$\left|\arctan\frac{1}{5} - U_p\left(\frac{1}{5}\right)\right| < 10^{-9} \text{ et } \left|\arctan\frac{1}{239} - U_q\left(\frac{1}{239}\right)\right| < 10^{-9}.$$

En déduire que $\left|\pi - \left(16U_p\left(\frac{1}{5}\right) - 4U_q\left(\frac{1}{239}\right)\right)\right| < 2.10^{-8}$.

Corrigé :

1. $S_n = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n}$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-x^2$, de premier terme 1, donc $S_n = \frac{1-\left(-x^2\right)(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} = \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$. Pour tout réel x et tout entier naturel n on a donc $\left|\frac{1}{1+x^2} - \left(1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n}\right)\right| = \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$. Or $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$(car $1 + x^2 \geq 1$) donc on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{1}{1+x^2} - \left(1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n}\right)\right| \leq x^{2n+2}}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On intégrant les deux membres de l'inégalité précédente entre 0 et x il vient

$$\int_0^x \left|\frac{1}{1+t^2} - \left(1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n}\right)\right| dt \leq \int_0^x t^{2n+2} dt.$$

Compte tenu de l'inégalité $\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt$ il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Si $x \leq 0$ alors $-x \geq 0$ et l'inégalité précédente donne

$$\left|\arctan(-x) + \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| \leq \frac{-x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Comme $\arctan(-x) = -\arctan x$ on a $\left|\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| \leq \frac{-x^{2n+3}}{2n+3}$. En définitive on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}}.$$

3. Pour $|x| \leq 1$ on a $\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$ et l'inégalité précédente donne $|\arctan x - U_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}$.

Comme $\frac{1}{2n+3} \longrightarrow 0$ quand n tend vers plus infini on a, d'après le théorème de l'étau, $|\arctan x - U_n(x)| \longrightarrow 0$ soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n(x) = \arctan x \text{ pour } |x| \leq 1}.$$

4. D'après 3/ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. De plus on a $\left|\frac{\pi}{4} - u_n\right| \leq \frac{1}{2n+3}$ pour tout entier naturel n (d'après 2/).

Pour avoir $\left|\frac{\pi}{4} - u_n\right| \leq 10^{-8}$ *il suffit* d'avoir $\frac{1}{2n+3} < 10^{-8}$, soit $n \geq 5.10^7$.

Cette méthode est trop longue et d'autre part elle est imprécise (erreur d'arrondis à chaque boucle).

5. a. Si $x > 0$, d'après le théorème des accroissements finis (arctangente étant dérivable sur $\mathbb{R}$) il existe $c \in]0, x[$ tel que $\arctan x - \arctan 0 = \frac{x}{1+c^2}$. Comme $1 + c^2 \geq 1$ on a $0 \leq \frac{x}{1+c^2} \leq x$. En définitive on obtient $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \arctan x \leq x}$ (cet encadrement étant vrai aussi pour $x = 0$).

b. Compte tenu de de $\tan\theta = \frac{1}{5}$ et de la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ on trouve $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{5}{12}$, $\tan(3\theta) = \frac{\tan(2\theta)+\tan\theta}{1-\tan(2\theta)\tan\theta} = \frac{37}{55}$ et $\tan(4\theta) = \frac{2\tan(2\theta)}{1-\tan^2 2\theta} = \frac{120}{119}$.

On a donc on a $\tan 3\theta < 1 < \tan 4\theta$. La fonction arctangente étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on a donc

$$\arctan(\tan 3\theta) < \arctan 1 < \arctan(\tan 4\theta).$$

D'autre part, d'après 5/ a/, $0 < \theta < \frac{1}{5}$ donc $0 \leq 3\theta \leq 4\theta < \frac{4}{5} < \frac{\pi}{2}$. On a donc $\arctan(\tan 3\theta) = 3\theta$ et $\arctan(\tan 4\theta) = 4\theta$, d'où $\boxed{3\theta < \frac{\pi}{4} < 4\theta}$.

▶ *Rappel :* on a $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$ *mais* $\arctan(\tan x) = x$ seulement pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$!

c. On a $\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\theta - 1}{1 + \tan 4\theta} = \frac{120/119 - 1}{1 + 120/119} = \frac{1}{239}$.

On a donc $\arctan\left(\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \arctan\frac{1}{239}$. D'autre part, comme $0 < 4\theta < \frac{\pi}{2}$ on a $-\frac{\pi}{4} < 4\theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$, donc $4\theta - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan\left(\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\theta - \frac{\pi}{4}$ (voir rappel ci-dessus). On a donc $4\theta - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$ soit

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}}.$$

d. D'après l'inégalité de 2/ on a $\left|\arctan\frac{1}{5} - U_p\left(\frac{1}{5}\right)\right| \leq \frac{(1/5)^{2p+3}}{2p+3}$.

Pour avoir $\left|\arctan\frac{1}{5} - U_p\left(\frac{1}{5}\right)\right| < 10^{-9}$ il suffit donc d'avoir $\frac{(1/5)^{2p+3}}{2p+3} < 10^{-9}$ soit $\boxed{p \geq 5}$ (à la calculatrice).

De même pour avoir $\left|\arctan\frac{1}{239} - U_q\left(\frac{1}{239}\right)\right|$ il suffit d'avoir $\frac{(1/239)^{2q+3}}{2q+3} < 10^{-9}$, soit $q \geq 1$.

Pour $p \geq 5$ et $q \geq 1$ on a (en posant $U_p = U_p(1/5)$ et $U_q = U_q(1/239)$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\pi}{4} - (4U_p - U_q)\right| &= \left|4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} - (4U_p - U_q)\right| \\
&= \left|4\left(\arctan\frac{1}{5} - U_p\right) - \left(\arctan\frac{1}{239} - U_q\right)\right| \\
&\leq 4\left|\arctan\frac{1}{5} - U_p\right| + \left|\arctan\frac{1}{239} - U_q\right| \\
&< 4.10^{-9} + 10^{-9} = 5.10^{-9}.
\end{aligned}$$

En multipliant par 4 on obtient $\boxed{|\pi - (16U_p - 4U_q)| < 2.10^{-8}}$.