$\boxed{\textbf{PS5}}$ Dans tout le problème on désigne par sh, ch et th les fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique.

Partie A. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Etudier la parité de f.

2. a. Donner un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. b. Déterminer la limite de f en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{th}(X) < X$.

5. En déduire le tableau de variation de f.

6. Donner le developpement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $X \longmapsto \dfrac{\mathrm{sh}(X)}{X}$.

7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, f admet un développement de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

où $a_0, \ldots, a$ sont cinq réels à préciser.

8. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, et montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Etude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) définie par

$$xy' + y = \mathrm{ch}(x).$$

12. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

13. Donner sans justifications les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.

14. Justifier que la fonction F (définie à la question 8/) est l'unique fonction qui soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

Partie C. Etude d'une suite

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la notera u_n.

16. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante (on pourra utiliser les propriétés de la bijection réciproque de f sur $\mathbb{R}_+^*$).

17. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

18. En utilisant la question 7/ déterminer un équivalent de u_n.

Partie D. Etude d'une fonction définie par une intégrale

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose :

$$J(x) = \int_{x/2}^{x} f(t)\, dt.$$

19. Justifier que $J(x)$ est définie pour $x \in \mathbb{R}^*$.

20. Montrer que J est impaire.

21. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

(On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$).

22. En déduire le signe de $J'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (on donne $1/\mathrm{argch}(2) \simeq 0,76$).

23. En utilisant le sens de variation de la fonction f montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\frac{xf(x)}{2} \leq J(x) \leq \frac{xf(x/2)}{2}.$$

24. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x)$ et montrer que $J(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

25. En remarquant que $J(x) - \frac{x}{2} = \int_{x/2}^{x} (f(t) - 1)\, dt$ pour $x > 0$ montrer que $J(x) - \frac{x}{2} \geq 0$ pour tout $x > 0$. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq J(x) - \frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).$$

26. Déduire de la question 7/ que $f(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

27. Déduire des deux questions précédentes que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(J(x) - \frac{x}{2}\right) = 0$. Conclusion pour le graphique de J ?

28. Donner l'allure du graphique de J.

Corrigé :

Partie A. Etude d'une fonction

1. La fonction sh étant impaire on voit immédiatement que f est paire.

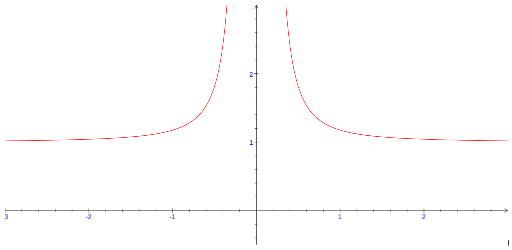
2. a. On a $\mathrm{sh}x \sim x$ en 0. Quand x tend vers $\pm\infty$ on a $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ donc $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1$ soit $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1}$.

2. b. Pour $x \neq 0$ on a $f(x) = \frac{xe^{1/x} - xe^{-1/x}}{2}$ et en posant $X = \frac{1}{x} \underset{x\longrightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, $f(x) = \frac{e^X}{2X} - \frac{e^{-X}}{2X}$. Comme $\frac{e^X}{2X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ il en résulte que f tend vers $+\infty$ en 0^+. Comme f est paire on a $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonction dérivable et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - x \times \frac{1}{x^2}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right] \times \mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. Pour $X \in \mathbb{R}_+$ posons $\varphi(X) = \mathrm{th}(X) - X$. On a $\varphi'(X) = 1 - \mathrm{th}^2(X) - 1 = -\mathrm{th}^2(X)$ qui est strictement négatif sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction φ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\varphi(0) = 0$ on a $\varphi(X) < 0$ pour $X \in \mathbb{R}_+^*$ soit $\mathrm{th}(X) < X$.

5. D'après 4/ on a $\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$ pour $x > 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (la fonction ch étant strictement positive sur $\mathbb{R}$) d'où le tableau de variation et le graphique de f sur $\mathbb{R}_+^*$:



x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	

6. On a, au voisinage de 0, $\text{sh}X = X+\frac{X^3}{6}+\frac{X^5}{120}+o\left(X^5\right)$ donc $\boxed{\frac{\text{sh}\left(X\right)}{X} = 1+\frac{X^2}{6}+\frac{X^4}{120}+o\left(X^4\right)}$.

7. En posant $X = \frac{1}{x} \underset{x\longrightarrow\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ on a $f\left(x\right) = \frac{\text{sh}\left(X\right)}{X} = 1+\frac{X^2}{6}+\frac{X^4}{120}+o\left(X^4\right)$ donc, au voisinage de $\pm\infty$, on a $\boxed{f\left(x\right) = 1+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{120x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)}$.

8. La fonction $F : x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ d'après 2/ a/ donc elle se prolonge par continuité en 0 en posant $F\left(0\right) = 1$.

De plus $F'\left(x\right) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{(\text{th}x-x)\text{ch}x}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{(\text{th}x-x)}{x^2}$ pour $x\neq0$. Comme $\text{th}x = x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$ au voisinage de 0, on a $F'\left(x\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to0} F'\left(x\right) = 0$. D'après le théorème "limite-dérivé", F est dérivable en 0, continue en 0 et $F'\left(0\right) = 0$. Comme F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B. Etude d'une équation différentielle

12. Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E) est équivalente a $y'+\frac{y}{x} = \frac{\text{ch}(x)}{x}$. L'équation homogène $y'+\frac{y}{x} = 0$ a pour solutions $y_0\left(x\right) = Ce^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$ où C est une constante réelle arbitraire.

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y\left(x\right) = \frac{C(x)}{x}$. On obtient, en reportant dans (E) $\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2} = \frac{\text{ch}(x)}{x}$ soit $\frac{C'(x)}{x} = \frac{\text{ch}(x)}{x}$ ou $C'\left(x\right) = \text{ch}(x)$ et on peut prendre $C\left(x\right) = \text{sh}(x)$. Une solution particulière de l'équation est donc $y_1\left(x\right) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$ et les solutions de l'équation s'écrivent $\boxed{y\left(x\right) = \frac{C+\text{sh}(x)}{x}}$.

13. Sur $\mathbb{R}_-^*$ les solution sont $y\left(x\right) = \frac{C'+\text{sh}(x)}{x}$ (avec $C'\in\mathbb{R}$, constante arbitraire).

14. Comme la fonction $\frac{\text{sh}(x)}{x}$ tend vers 1 en 0, $y\left(x\right)$ tend vers $\pm\infty$ quand x tend vers 0 si les constantes C ou C' sont non nulles. Donc la fonction y se prolonge par continuité en 0 ssi $C = C' = 0$ en posant $y\left(0\right) = 1$ (donc $y = F$).

De plus on a le dl en 0 : $\frac{\text{sh}(x)}{x} = 1+o\left(x\right)$ donc F est dérivable en 0 et $F'\left(0\right) = 0$.

Enfin il est clair que F vérifie l'équation différentielle $xy'+y = \text{ch}(x)$ pour $x = 0$ (car $\text{ch}(0) = 1$).

Conclusion : F est l'unique fonction qui soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

Partie C. Etude d'une suite

15. Comme f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ elle induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1,+\infty[$. Comme $\frac{n+1}{n} > 1$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f\left(x\right) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}_+^*$.

16. Pour tout entier naturel non nul on a $u_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) = f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Comme la suite $1+\frac{1}{n}$ est décroissante et la fonction f décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ il en résulte que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.

17. Comme f tend vers 1 quand x tend vers l'infini, il en résulte que $\lim\limits_{x\to1} f^{-1}\left(x\right) = +\infty$. Comme la suite $1+\frac{1}{n}$ tend vers 1 on en déduit que $u_n = f^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tend vers $+\infty$.

18. D'après 7/ on a $f(x)-1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^2}$ donc, comme u_n tend vers $+\infty$, on a $f(u_n)-1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6u_n^2}$. Comme $f(u_n)-1=\frac{1}{n}$ on a donc $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6u_n^2}$ ce qui équivaut à $\frac{6u_n^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ou $\frac{u_n}{\sqrt{\frac{n}{6}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ soit $\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}}$.

Partie D. Etude d'une fonction définie par une intégrale

19. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$donc sur $\left[\frac{x}{2},x\right]$ pour $x\in\mathbb{R}^*$ donc la fonction J est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

20. Dans $J(x)=\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$ on pose $u=-t$, donc $du=-dt$ et $J(x)=\int_{-x/2}^{-x} f(-u)\,(-du)=-\int_{-x/2}^{-x} f(u)\,du$ (car f est paire)$=-J(x)$, donc J est impaire.

21. Soit Φ une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$ (existe car f continue). On a alors $J(x)=\Phi(x)-\Phi\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x\in\mathbb{R}^*$. Donc J est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (somme et composée de fonctions dérivables) et pour tout $x\neq 0$, $J'(x)=f(x)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{4}\mathrm{sh}\left(\frac{2}{x}\right)$. Or $\mathrm{sh}\left(\frac{2}{x}\right)=2\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$ d'où $J'(x)=x\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\left[1-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{2}{x}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}\right]=f(x)\left[1-\frac{1}{2}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

22. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est strictement positif, donc $J'(x)$ a le signe de $1-\frac{1}{2}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$. On a $J'(x)\geq 0$ ssi $\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\leq 2$ ssi $\frac{1}{x}\leq \mathrm{argch}(2)$ (ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc argch aussi), soit $x\geq \frac{1}{\mathrm{argch}(2)}$.

23. La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a, pour $0<\frac{x}{2}\leq t\leq x$, $f(x)\leq f(t)\leq f\left(\frac{x}{2}\right)$. En intégrant entre $\frac{x}{2}$ et x on obtient : $\int_{x/2}^{x} f(x)\,dt\leq J(x)\leq \int_{x/2}^{x} f\left(\frac{x}{2}\right)dt$, soit $\boxed{\frac{xf(x)}{2}\leq J(x)\leq \frac{xf(x/2)}{2}}$ pour $x>0$.

24. Comme $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)}{2}=+\infty$. De plus $J(x)\geq \frac{xf(x)}{2}$ pour $x>0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}J(x)=+\infty$ (théorème de comparaison).

D'après la question précédente on a : $\forall x>0, \frac{f(x)}{2}\leq\frac{J(x)}{x}\leq\frac{f(x/2)}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x/2)=1$ donc, d'après le théorème de l'étau, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{J(x)}{x}=\frac{1}{2}$ soit $\boxed{J(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{x}{2}}$.

25. Pour $t>0$ on a $f(t)\geq 1$ soit $f(t)-1\geq 0$, donc $\int_{x/2}^{x}(f(t)-1)\,dt\geq 0$ pour $x>0$ (positivité de l'intégrale). On a donc $J(x)-\frac{x}{2}\geq 0$ pour tout $x>0$ et d'après 23/, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*, 0\leq J(x)-\frac{x}{2}\leq\frac{x}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)}$.

26. D'après 7/, $f(x)-1=\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $f(x)-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{6x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

27. D'après la question précédente, $f\left(\frac{x}{2}\right)-1\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{6(x/2)^2}=\frac{2}{3x^2}$, donc $\frac{x}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{3x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)=0$. D'après l'encadrement de la question précédente, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(J(x)-\frac{x}{2}\right)=0}$.

Le graphique de Γ admet, au voisinage de $+\infty$, une asymptote D oblique d'équation $y=\frac{x}{2}$ et Γ est au dessus de D pour $x>0$.