$\boxed{\textbf{PS6}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose : $R_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1. Justifier que R_n est l'unique solution du l'équation différentielle :

$$y'(x) - y(x) = \frac{x^n}{n!}, \text{ avec la condition initiale } y(0) = 0.$$

2. Résoudre l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = \frac{x^n}{n!}$ (**E**).

(On exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).

3. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, R_n(x) = \frac{e^x}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

4. Montrer que pour tout réel positif x on a :

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}.$$

5. Montrer que la suite $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ est convergente vers e^x pour $x \in \mathbb{R}_+$ soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Partie II

On considère la fonction g définie sur $[0,1]$ par :

$$g(0) = 0 \text{ et } \forall x \in \,]0,1]\,, g(x) = x \ln x.$$

6. Etudier la continuité et la dérivabilité de g.

7. Préciser les variations de g sur $[0,1]$ et tracer son graphique.

8. En déduire que $M = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$ existe et en donner sa valeur.

Partie III

On pose : $I = \int_0^1 x^{-x} dx$.

9. Exprimer, pour $x \in \,]0,1]$, la fonction $x \longmapsto x^{-x}$ à l'aide de la fonction g (définie dans la partie II) puis donner un sens à cette intégrale.

10. En utilisant la parti I/, montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x dx + \int_0^1 \widetilde{R_n}(x)\, dx,$$

avec $\widetilde{R_n}(x) = R_n(-g(x))$ (R_n est définie dans la partie I/).

11. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\left|\int_0^1 \widetilde{R_n}(x)\,dx\right| \leq \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

On pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln^q x dx$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$.

12. a. Calculer $I_{p,0}$ pour $p \in \mathbb{N}$.

b. Pour $\alpha \in]0,1[$ on pose $J_{p,q} = \displaystyle\int_\alpha^1 x^p \ln^q x dx$.

En intégrant par parties $J_{p,q}$ puis en faisant tendre α vers 0 montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} J_{p,q-1}.$$

c. En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ entiers naturels :

$$I_{p,q} = \frac{(-1)^q\, q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

13. a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$ est convergente.

b. En utilisant les questions précédentes retrouver le résultat précédent et montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = I.$$

Corrigé :

Partie I

1. R_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme fonction polynôme) et pour tout réel x on a $R_n'(x) = e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$, donc $R_n'(x) - R_n(x) = e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - \left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \frac{x^n}{n}$.

De plus $R_n(0) = 0$. Or l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = \frac{x^n}{n!}$, avec la condition initiale $y(0) = 0$ a une unique solution donc cette solution est la fonction R_n.

2. L'équation homogène est $y'(x) - y(x) = 0$ a pour soluions $y(x) = Ce^x$ $(C \in \mathbb{R})$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation on la cherche sous la forme $y_1(x) = C(x)e^x$ (méthode de variation de la constante). On a $y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x$ et en reportant dans l'équation **(E)** on obtient : $C'(x)e^x = \dfrac{x^n}{n!}$, soit $C'(x) = e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$. On a par exemple $C(x) = \int_0^x e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt$, donc une solution particulière de l'équation **(E)** est $y_1(x) = e^x \int_0^x e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt$.

Les solutions de (E) sont donc définies par $\boxed{y(x) = Ce^x + e^x \int_0^x e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt}$.

3. Cherchons la solution de **(E)** qui s'annule en 0 : on a $y(0) = 0 \Longleftrightarrow C = 0$. La solution qui s'annule en 0 est donc définie par $y(x) = e^x \int_0^x e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt$, soit $y(x) = \frac{e^x}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dx$. D'après 1/ on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, R_n(x) = \frac{e^x}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt.$$

4. Pour $x \geq 0$ on a $|R_n(x)| = \frac{e^x}{n!}\left|\int_0^x t^n e^{-t}dt\right| = \frac{e^x}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$.

Or, pour $t \in [0,x]$ on a $0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$, donc $0 \leq \int_0^x t^n e^{-t}dt \leq \int_0^x t^n dt$, soit $0 \leq \int_0^x t^n e^{-t}dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$. On a donc $|R_n(x)| \leq \frac{e^x}{n!} \times \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ soit $\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}}$.

5. Pour tout réel x positif on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x - R_n(x)$. Comme $\frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a $R_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (d'après 4/), donc la suite $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers e^x ce qui s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Partie II

6. g est continue et dérivable sur $]0,1]$ (comme produit de fonctions dérivables).
On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0.
Dérivabilité de g en 0 : le taux de variation de g en 0 est $\tau_x = \frac{g(x)-g(0)}{x} = \ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$. Donc g n'est pas dérivable en 0 et son graphique admet en O une tangente verticale.

7. Pour $x \in]0,1]$ on a $g'(x) = \ln x + 1$, donc $g'(x) \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$, d'où le tableau de variation de g et son graphique.

8. g étant continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$ elle est bornée sur cet intervalle donc $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ existe. D'après 7/ $M = |g(e^{-1})| = e^{-1}$.

Partie III

9. On a $x^{-x} = e^{-x\ln x} = e^{-g(x)}$ pour $x \in]0,1]$. La fonction $x \longmapsto e^{-g(x)}$ est donc le prolongement donc par continuité sur $[0,1]$ de la fonction $x \longmapsto x^{-x}$ et I désigne $\int_0^1 e^{-g(x)}dx$.

10. On a $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$ pour $x \geq 0$. Pour $x \in]0,1]$ on a $-x\ln x \geq 0$ donc $e^{-x\ln x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k \ln^k x}{k!} + R_n(-x\ln x)$. En intégrant entre 0 et 1 on a $I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x dx + \int_0^1 \widetilde{R_n}(x)\,dx$ avec $\widetilde{R_n}(x) = R_n(-x\ln x) = R_n(-g(x))$.
(L'intégrale $\int_0^1 x^k \ln^k x dx$ a un sens car la fonction $\varphi_k : x \longmapsto x^k \ln^k x$ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi_k(0) = 0$ si $k \geq 1$ et $\varphi_0(0) = 1$).

11. On a $\left|\int_0^1 \widetilde{R_n}(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 R_n(-g(x))\,dx\right| \leq \int_0^1 |R_n(-g(x))|\,dx$.
D'après 4/ on a, pour $x \in [0,1]$, $|R_n(-g(x))| \leq \frac{|g(x)|^{n+1}e^{-g(x)}}{(n+1)!}$. De plus $|g(x)| = -g(x) \leq e^{-1}$, donc $|R_n(-g(x))| \leq \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}(n+1)!}$. On a donc $\left|\int_0^1 \widetilde{R_n}(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}(n+1)!}dx = \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}(n+1)!}$.

12. a. $I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

b. On intègre $J_{p,q} = \displaystyle\int_\alpha^1 x^p \ln^q x dx$ par parties en posant $u = \ln^q x$ et $v' = x^p$, $u' = q\frac{\ln^{q-1} x}{x}$, $v =$ (u et v étant de classe C^1 sur $[\alpha,1]$) et on obtient : $J_{p,q} = \left[\ln^q x \times \frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_\alpha^1 - \frac{q}{p+1}\int_\alpha^1 x^p \ln^{q-1} x dx$, soit $J_{p,q} = \ln^q \alpha \times \frac{\alpha^{p+1}}{p+1} - \frac{q}{p+1}\int_\alpha^1 x^p \ln^{q-1} x dx$.
En faisant tendre α vers 0 on obtient : $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

c. En écrivant $I_{p,k} = -\frac{k}{p+1} I_{p,k-1}$ pour $k = 0, 1, \ldots, q$ et en multipliant membres à membres on obtient : $I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} \times I_{p,0}$ soit $\boxed{I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}}$.

13. a. La série est à termes positifs et, pour $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2$), donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$ est convergente.

b. Il résulte de la question précédente que $I_{k,k} = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ pour tout entier naturel k et d'après 10/ on a donc $I = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}} + \int_0^1 \widetilde{R_n}(x)\,dx$, soit $I = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} + \int_0^1 \widetilde{R_n}(x)\,dx$.

D'après 11/ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \widetilde{R_n}(x)\,dx = 0$. La suite $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$ converge donc vers I, soit $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^k}$ converge vers I. C'est équivalent à dire que la série de terme général $\frac{1}{k^k}$ est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = I.$$