Probabilités, Variables aléatoires

1 Une urne est composée de n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ les numéros des boules prélevées. Le tirage s'arrête dès que $b_k \geq b_{k-1}$ (c'est à dire lorsqu'on tire une boule dont le numéro est supérieur ou égal au numéro de la boule précédente).

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectué.

1. Quel est le maximum de tirages que l'on effectue ?

Déterminer les valeurs possibles de X_n.

2. Justifier que la nombre de suite strictement croissantes de k entiers de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est $\binom{k}{n}$.

3. Calculer $P(X_n > k)$ (k ayant les valeurs trouvées en 1/).

4. En déduire que $P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

5. Soit la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^{n+1}$. En considérant $f"(x)$ montrer que l'espérance $E(X_n)$ de X_n est égale à $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

Déterminer la limite de $E(X_n)_n$ quand n tend vers l'infini.

2 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard et simultanément deux boules. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

On garde la boule ayant ce plus grand numéro et on remet l'autre dans l'urne. On tire ensuite une autre boule de l'urne. Soit Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au deuxième tirage.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

Déterminer la loi de X et son espérance.

2. a. Calculer $P_{(X=k)}(Y = i)$ (distinguer les cas $i \neq k$ et $i = k$).

b. Déterminer la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y) (c'est à dire la probabilité de $(X = k) \cap (Y = i)$).

3. Déduire de la question précédente la loi de Y (i.e. $P(Y = i)$).

3 Dans un jeu de 32 cartes on tire simultanément 5 cartes.

1. Préciser l'univers et son cardinal.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une seule paire (i.e. deux cartes de même hauteur exactement) ?

3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires ?

4. Quelle est la probabilité d'obtenir un brelan (i.e. trois cartes de même hauteur) ?

5. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré (i.e. cartes cartes de même hauteur) ?

(On rappelle qu'il y-a 8 hauteurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).

4 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On effectue au hasard un tirage simultané de 2 boules.

1. Préciser l'univers Ω et son cardinal.

Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenu.

On garde la boule ayant le plus grand numéro et on remet l'autre dans l'urne.

On tire alors une autre boule de l'urne et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de cette boule.

2. Quelles sont les valeurs prises par X ? Préciser la loi de X et son espérance.

3. Déterminer $P_{[X=k]}(Y=i)$.

En déduire la loi conjointe du couple de variable aléatoire (X,Y) (i.e. $P((X=i)\cap(Y=k))$).

4. En déduire la loi de Y.

$\boxed{6}$ On se place dans l'ensemble des familles de n enfants ($n \geq 2$).

Soit A l'événement "la famille est constituée d'enfants de deux sexes" et B l'événement "la famille est constituée de garçons et d'au plus une fille".

1. Décrire l'univers et son cardinal.

2. Calculer les probabilités des événements A et B et de $A \cap B$.

3. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 on a : $2^{n-1} > n+1$.

4. Pour quelle valeur de n les événements A et B sont-ils indépendants ?

$\boxed{7}$ Un joueur débutant effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie la probabilité de gagner ou de perdre sont les mêmes, puis on suppose que :

- si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est $0,6$;

- si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est $0,7$.

Soit G_n l'événement : "le joueur gagne la n-ième partie".

On note $u_n = P(G_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Ecrire une relation entre u_{n+1} et u_n .

Calculer u_n pour tout entier naturel n non nul et sa limite quand n tend vers l'infini.

$\boxed{8}$ On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer successivement avec remise de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :

J_k « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro k » ($k \in \{1,2,3,4\}$);

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches ».

1. Montrer que $p(B)$, probabilité de l'événement B, vaut $\frac{203}{1250}$.

2. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

$\boxed{9}$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On effectue au hasard un tirage simultané de 2 boules.

1. Préciser l'univers Ω et son cardinal.

Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenu.

On garde la boule ayant le plus grand numéro et on remet l'autre dans l'urne.

On tire alors une autre boule de l'urne et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de cette boule.

2. Quelles sont les valeurs prises par X ? Préciser la loi de X et son espérance.

3. Déterminer $P_{[X=k]}(Y=i)$.

En déduire la loi conjointe du couple de variable aléatoire (X,Y) (i.e. $P((X=i)\cap(Y=k))$).

4. En déduire la loi de Y.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard plusieurs fois avec remise un boule de l'urne. On arrête le tirage dès que le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu lors du précédent tirage. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?

2. Calculer $P(X\geq 2)$ et $P(X\geq 3)$. En déduire $P(X=2)$.

3. Pour $k\in\mathbb{N}^*$ montrer que le nombre de suites strictements décroissantes de k entiers compris entre 1 et n est $\binom{n}{k}$.

En déduire que $P(X\geq k+1)=\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ pour $k\in\{1,\ldots,n\}$.

4. En déduire la loi de probabilité de X (i.e. $P(X=k)$) et l'espérance de X.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Un sac contient des jetons à deux faces, l'une bleue, l'autre rouge. Pour $k\in\{1,\ldots,n\}$ il y-a exactement k jetons portant le numéro k sur leur face bleue et les numéros $1,2,\ldots,k$ sur leur face rouge.

On tire au hasard un jeton de l'urne. Soit B la variable aléatoire associé à son numéro bleu et R la variable aléatoire associée à son numéro rouge.

1. Déterminer le nombre de jetons de l'urne.

2. Déterminer la loi du couple (B,R).

3. En déduire la loi de B et de R. Calculer leurs espérances.

4. Suite au tirage du jeton on gagne $G=B-R$ euros. Préciser l'espérance de G.
Calculer $\text{cov}(BR)$ (on rappelle que $\text{cov}(BR)=E(BR)-E(B)E(R)$) puis la variance de G.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n\in\mathbb{N}^*$).

On retire l'une après l'autre toutes les boules de cette urne.

1. Préciser l'univers et son cardinal.

2. Quelle est la probabilité pour que les trois boules $1,2,3$ soient sortent consécutivement dans cet ordre ?

3. Calculer la probabilité pour que les trois boules $1,2,3$ sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas).

Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules $1,2,3$.

4. Quelle sont les valeurs que peut prendre X_n ?

5. Calculer $P(X_n\leq k)$ pour $k\leq n$.

6. En déduire la loi de X_n ainsi que son espérance.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Un promeneur se promène entre deux maisons A et B. A $t=0$ il est en A. A chaque instant il joue au dé la maison vers laquelle il va. S'il tire 1 ou 6 il change de maison sinon il y reste.

Soient les événement A_n "le promeneur est en A à l'instant t" et B_n "le promeneur est en B à l'instant t".

On pose $a_n=P(A_n)$ et $b_n=P(B_n)$.

1. Etablir une relation entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.

2. En déduire a_n et b_n.

Calculer les limites de a_n et b_n quand n tend vers l'infini.

15 Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément 5 boules de l'urne.

a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b. Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?

2. Mêmes questions si le tirage se fait successivement avec remise.

3. Mêmes questions si le tirage se fait successivement et si les boules ne sont pas numérotées.

16 On dispose de deux urnes. L'urne 1 comporte n boules numérotées de 1 à n et l'urne 2 comporte 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2,..., n boules numérotées n. On tire une boule de l'urne 1 et une boule de l'urne 2.

Soient X_1, X_2 les variables aléatoires : X_1 : "numéro de la boule tirée de l'urne 1", X_2 : "numéro de la boule tirée de urnel' 2".

Soit G l'événement : "la première boule tirée de l'urne 1 a un numéro strictement supérieur au numéro de la boule tirée de l'urne 2".

1. Préciser la loi conjointe du couple (X_1, X_2) i.e. $P((X_1 = i) \cap (X_2 = j))$.

2. Que peut-on dire du système d'événements $(X_2 = j)_{1 \leq j \leq n}$?

Calculer la probabilité de G.

3. Calculer l'espérance de X_1 et X_2.

17 Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. Chacune souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.

Soit X_1 la VA égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage 1, X_2 la VA égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage 2 et X_3 la VA égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage 3.

1. Reconnaître la loi X_1 et donner sa loi de probabilité.

Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

2. Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.

En déduire $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$.

Montrer que la probabilité que l'asenseur ne s'arrête qu'une fois est $\frac{1}{81}$.

Soit Z la VA égale au nombre d'arrêt de l'ascenseur. D'après 2/ on a $P(Z = 1) = \frac{1}{81}$.

4. a. Quelle sont les valeurs prises par Z ?

Soit Y_1 la VA de Bernoulli égale 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et 0 sinon. On définit de même les VA Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.

b. Donner la loi de Y_1 et calculer $E(Y_1)$. ont

Il est clair que Y_1 et Y_2 suivent la même loi et donc qu'elles même espérance.

c. Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3. Calculer $E(Z)$ et vérifier que $E(Z) = \frac{211}{81}$.

18 Un sac contient des jetons à deux faces, l'une bleue, l'autre rouge. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ il y-a exactement k jetons portant le numéro k sur leur face bleue et les numéros $1, 2, \dots, k$ sur leur face rouge.

On tire au hasard un jeton du sac. Soit B la variable aléatoire associé à son numéro bleu et R la variable aléatoire associée à son numéro rouge.

1. Déterminer le nombre de jetons du sac.

2. Déterminer la loi du couple (B, R).

3. En déduire la loi de B et de R. Calculer leur espérance et leur variance.

$\boxed{\mathbf{19}}$ On dispose de N urnes numérotées de 1 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires.

1. a. On choisit une urne au hasard puis on tire de cette urne une boule.

Quelle est la probabilité que cette boule soit blanche ? Quelle est sa limite quand N tend vers l'infini ?

b. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement avec remise de cette urne deux boules.

Quelle est la probabilité que ces deux boules soit blanches ? Quelle est sa limite quand N tend vers l'infini ?

2. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement avec remise de cette urne n boules.

Quelle est la probabilité $p(n, N)$ que les n boules tirées soient toutes blanches ?

3. Calculer la limite de $p(n, N)$ quand N tend vers l'infini.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on tire successivement au hasard et avec remise $n+1$ boules. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro déjà obtenu précedemment.

Par exemple, si $n = 5$, si on obtient le tirage $5, 3, 2, 2, 5, 3$ alors $X = 4$.

1. Préciser l'univers Ω et son cardinal.

Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = n+1)$.

3. Soit $k \in [[2, n]]$. Expliciter les tirages correspondant à l'événement $X > k$.
En déduire que $P(X > k) = \frac{n!}{(n-k)! \times n^k}$.
Vérifier que la formule précédente est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$.
4. Pour $k \in [[2, n+1]]$,calculer $P(X = k)$.

<u>*Correction*</u> :

$\boxed{1}$ **1.** On a $X_n \geq 2$.

Si on effectue k tirage c'est que la suite de numéros des k boules tirées forment une suite strictement décroissante. La plus longue suite d'entiers de 1 à n strictment décroissante est $(n, n-1, \ldots, 1)$. Au tirage suivant on aura un numéro ≥ 1 donc le tirage s'arrête. On a donc $X_n \leq n+1$.

3. Soit $k \in \{2, \ldots, n+1\}$ et déterminons $P(X_n > k)$.

L'évévement $(X_n > k)$ correspond à un tirage dont les numéros des k premières boules forment une suite strictement croissante.

Il y-a n^k façons de tirer k boules simultanément (nombre de k-listes des n boules).

Les tirages favorables sont constitués d'une suite strictement décroissante de k entiers de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Il y-a $\binom{n}{k}$ suites strictement croissantes de k d'entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Donc $P(X_n > k) = \dfrac{\dbinom{n}{k}}{n^k}$.

4. On a $P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \dfrac{\dbinom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \dfrac{\dbinom{n}{k}}{n^k}$, soit

$$\begin{aligned}
n^k P(X_n = k) &= n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} \\
&= \frac{n.n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left[\frac{n}{n-k+1} - \frac{1}{k}\right] \\
&= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \times \frac{n(k-1)+(k-1)}{k(n-k+1)} \\
&= \frac{(k-1)(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \\
&= (k-1)\tbinom{n+1}{k},
\end{aligned}$$

donc $P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

5. On a : $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} kP(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+2} k\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Si $f(x) = (1+x)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k$, on a, en dérivant deux fois : $f"(x) = n(n+1)(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k}x^{k-2}$. Donc $E(X_n) = \frac{1}{n^2}f"\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

On a $E(X_n) = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Quand n tend vers l'infini on a : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 1$ soit $\boxed{\lim E(X_n) \longrightarrow e}$.

2 **1.** X prend les valeurs $2, 3, \ldots, n$.

Pour trouver la loi de X tout se passe comme s'il n'y avait que le premier tirage des 2 boules.

Les tirages s'effectuant au hasard on a équiprobabilité.

Le nombre de cas possible est $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Si $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, le nombre de cas favorable est le nombre de 2-combinaisons constitué de k et d'un nombre $< k$: il y-en a donc $k-1$.

Donc $P(X = k) = \frac{k-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$.

L'espérance de X est donc $E(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\frac{2(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=2}^{n}(k^2-k)$. On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(k^2-k) = \sum_{k=1}^{n}(k^2-k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$, d'où $\boxed{E(X) = \frac{2(n+1)}{3}}$.

2. a. L'événement $(Y = i)\,/\,(X = k)$ est "on tire au second tirage la boule i dans une urne où ne figure plus la boule n°k", donc $P_{(X=k)}(Y = i) = 0$ si $i = k$ et $P_{(X=k)}(Y = i) = \frac{1}{n-1}$ si $i \neq k$.

b. Pour $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $i \neq k$ on a $P((X = k) \cap (Y = i)) = P(X = k) \times P_{(X=k)}(Y = i) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-1} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)^2}$.

3. Le système d'évévements $(X = k)$ $(2 \leq k \leq n)$ étant complet, on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{\substack{2\leq k\leq n \\ i\neq k}} P\left((X=k)\cap(Y=i)\right) \\ &= \sum_{\substack{2\leq k\leq n \\ k\neq i}} \frac{2(k-1)}{n(n-1)^2} \\ &= \sum_{2\leq k\leq n} \frac{2(k-1)}{n(n-1)^2} - \frac{2(i-1)}{n(n-1)^2} \\ &= \sum_{1\leq k\leq n} \frac{2(k-1)}{n(n-1)^2} - \frac{2(i-1)}{n(n-1)^2}. \end{aligned}$$

On a $\displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} 2(k-1) = 2(1+2+\ldots+(n-1)) = n(n-1)$, donc $\boxed{P(X=i) = \frac{1}{n-1} - \frac{2(i-1)}{n(n-1)^2}}$.

$\boxed{3}$

$\boxed{4}$ **1.** Ω est l'ensemble des parties de $\{1,2,\ldots,n\}$ à 2 éléments, i.e. les 2-combinaisons de $\{1,2,\ldots,n\}$. On a donc $\mathrm{card}\Omega = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

2. X prend les valeurs de $\{2,3,\ldots,n\}$.

Pour $i \in \{2,3,\ldots,n\}$, l'événement $X=i$ est "on tire deux boules et i est le plus grand numéro des 2 boules". Le nombre de cas favorables est le nombre de paires $\{i,j\}$ avec $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ et $j<i$, c'est à dire $i-1$.

Comme on a l'hypothèse d'équiprobabilité, on a $\boxed{P(X=i) = \frac{i-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(i-1)}{n(n-1)}}$.

L'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{2i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=2}^{n} i(i-1)$.

On a $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} i(i-1) = \sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n\left(n^2-1\right)}{3}$.

On a donc $\boxed{E(X) = \frac{2(n+1)}{3}}$.

3. $P_{[X=k]}(Y=i)$ est la probabilité de tirer la boule i au deuxième tirage sachant qu'on a tiré la boule k au premier. Cette probabilité est nulle si $i=k$ (car la boule k a été retirée de l'urne après le premier tirage).

Si $i\neq k$ il y-a $n-1$ boules dans l'urne donc $P_{[X=k]}(Y=i) = \frac{1}{n-1}$.

On a donc $P\left((X=i)\cap(Y=k)\right) = P(X=i)\times P_{[X=k]}(Y=i) = \frac{2(i-1)}{n(n-1)}\times\frac{1}{n-1}$, soit $P\left((X=i)\cap(Y=k\right.$

4. Le système d'événement $(Y=i)_{1\leq i\leq n}$ étant complet, on a, d'après la formule des probabilités totales : $P(Y=k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P\left((X=i)\cap(Y=k)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{n(n-1)^2} - \frac{2(k-1)}{n(n-1)^2}$.

On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{n(n-1)^2} = \frac{2}{n(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{2}{n(n-1)^2}\times\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{n-1}$, soit $\boxed{P(Y=k) = \frac{1}{n-1} - \frac{2(k-1)}{n(n-1)^2}}$.

$\boxed{5}$ **1.** L'univers est constitué des n liste de $\{G,F\}$ i.e. $\Omega = \{G,F\}^n$ et $card(\Omega) = 2^n$.

2. $\overline{A}$ est l'événement : la famille n'est constituée que de filles ou que de garçons. Le nombre de cas favorables est 2, donc $p\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, d'où $\boxed{p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$.

On a $B = G\cup F_1$ avec $G =$ "la famille est constituée que de garçons" et $F_1 =$ "la famille est constituée d'une fille et $n-1$ garçons".

On a $p(G) = \frac{1}{2^n}$ (il y-a un cas favorable) et $p(F_1) = \frac{n}{2^n}$ (nombre de cas favorables : nombre de n-listes où figure une seule fois F). Comme $G \cap F_1 = \varnothing$, on a $p(B) = p(G) + p(F_1)$, donc $\boxed{p(B) = \frac{n+1}{2^n}}$.

On a $A \cap B = F_1$ donc $\boxed{p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}}$.

3. Récurrence sur n.

4. Les événements sont indépendants ssi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, soit $\frac{n}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \left(\frac{n+1}{2^n}\right)$, ce qui équivaut à $n + 1 = 2^{n-1}$. D'après 3/ on a $n \leq 3$. L'égalité est réalisée ssi $n = 3$ donc les événements A et B sont-ils indépendants ssi $n = 3$.

$\boxed{6}$ **1.** On a $u_1 = 1/2$.

Le système $\left(G_1, \overline{G_1}\right)$ étant un système complet d'événements, on a, d'après la formule des probabilités totales : $u_2 = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)$, soit $u_2 = 0.5 \times 0.6 + 0.5 \times 0.3 = 0.45$.

2. On cherche $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right)$. On a $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \frac{p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)}{p(G_2)} = \frac{p_{\overline{G_1}}(G_2) \times p\left(\overline{G_1}\right)}{p(G_2)}$, soit $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \frac{0.3 \times 0.5}{0.45} = \frac{1}{3}$.

3. Le système $\left(G_n, \overline{G_n}\right)$ étant un système complet d'événements, on a, $u_{n+1} = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p\left(\overline{G_n}\right) \times p_{\overline{Gn}}(G_{n+1}) = 0,6u_n + 0,3(1 - u_n)$, soit $\boxed{u_{n+1} = 0,3u_n + 0,3}$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie par $f(x) = 0,3x + 0,3$ donc le point fixe est $\frac{3}{7}$.

Pour tout n on a $u_{n+1} - \frac{3}{7} = f(u_n) - \frac{3}{7} = 0,3\left(u_n - \frac{3}{7}\right)$. La suite $\left(u_n - \frac{3}{7}\right)$ est géométrique de raison $0,3$ donc, pour tout entier naturel n, on a $u_n - \frac{3}{7} = (0,3)^{n-1}\left(u_1 - \frac{3}{7}\right)$, soit $u_n = (0,3)^{n-1} \times \left(0,5 - \frac{3}{7}\right) + \frac{3}{7}$. Quand n tend vers l'infini, u_n tend vers $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{3}{7}}$.

$\boxed{7}$ **1.** Le système $\{J_1, J_2, J_3, J_3\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a : $p(B) = \sum_{k=1}^{4} p(J_k) \times p_{J_k}(B)$.

On a $p(J_k) = \frac{1}{4}$.

L'événement B/J_k est "tirer k boules blanches de l'urne U_2 qui compte 10 boules dont 4 blanches". Le nombre de cas possibles est 10^k (tirages successifs avec remises) et le nombre de cas favorables est 4^k donc $p_{J_k}(B) = \frac{4^k}{10^k}$.

On a donc $p(B) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{10} + \frac{4^2}{10^2} + \frac{4^3}{10^3} + \frac{4^4}{10^4}\right) = \frac{203}{1250}$.

2. On cherche $p_B(J_3)$. On écrit : $p_B(J_3) = \frac{p(B \cap J_3)}{p(B)} = \frac{p_{J_3}(B) \times p(J_3)}{p(B)}$, soit $p_B(J_3) = \frac{\frac{4^3}{10^3} \times \frac{1}{4}}{\frac{203}{1250}} = \frac{20}{203}$.

$\boxed{8}$ **1.** Ω est l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$ à 2 éléments, i.e. les 2-combinaisons de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On a donc $\text{card}\Omega = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

2. X prend les valeurs de $\{2, 3, \ldots, n\}$.

Pour $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, l'événement $X = i$ est "on tire deux boules et i est le plus grand numéro des 2 boules". Le nombre de cas favorables est le nombre de paires $\{i, j\}$ avec $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $j < i$, c'est à dire $i - 1$.

Comme on a l'hypothèse d'équiprobabilité, on a $\boxed{P(X = i) = \frac{i-1}{\binom{n}{2}} = \frac{2(i-1)}{n(n-1)}}$.

L'espérance de X est $E(X) = \sum_{i=2}^{n} \frac{2i(i-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=2}^{n} i(i-1)$.

On a $\sum_{i=2}^{n} i\,(i-1) = \sum_{i=1}^{n} i\,(i-1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n\left(n^2-1\right)}{3}$.

On a donc $\boxed{E\,(X) = \frac{2(n+1)}{3}}$.

3. $P_{[X=k]}\,(Y=i)$ est la probabilité de tirer la boule i au deuxième tirage sachant qu'on a tiré la boule k au premier. Cette probabilité est nulle si $i=k$ (car la boule k a été retirée de l'urne après le premier tirage).

Si $i \neq k$ il y-a $n-1$ boules dans l'urne donc $P_{[X=k]}\,(Y=i) = \frac{1}{n-1}$.

On a donc $P\,((X=i) \cap (Y=k)) = P\,(X=i) \times P_{[X=i]}\,(Y=k) = \frac{2(i-1)}{n(n-1)} \times \frac{1}{n-1}$ si $i \neq k$, soit $\boxed{P\,((X=i) \cap (Y=k)) = \frac{2(i-1)}{n(n-1)^2} \text{ si } i \neq k \text{ et } 0 \text{ sinon}}$.

4. Le système d'événements $(Y=i)_{1 \leq i \leq n}$ étant complet, on a, d'après la formule des probabilités totales : $P\,(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P\,((X=i) \cap (Y=k)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{n(n-1)^2} - \frac{2(k-1)}{n(n-1)^2}$.

On a $\sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{n(n-1)^2} = \frac{2}{n(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{2}{n(n-1)^2} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{n-1}$, soit $\boxed{P\,(Y=k) = \frac{1}{n-1} - \frac{2(k-1)}{n(n-1)^2}}$.

$\boxed{9}$ **1.** La valeur minimale de X est 2. Le nombre maximale de tirages se produit lorsqu'on a la suite $n, n-1, \ldots, 1$ suivi d'un numéro de boule quelconque. X prend donc les valeurs $2, 3, \ldots, n+1$.

2. D'après 1/ on a $P\,(X \geq 2) = 1$.

L'événement $(X \geq 3)$ se produit lorsque les deux premiers numéros des boules forment une suite strictement décroissante. Le nombre de ces suites est le nombre d'ensemble à 2 éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$ c'est à dire $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Il y a n^2 tirages possibles de deux boules (l'ordre compte il peut y avoir répétitions). On a donc $P\,(X \geq 3) = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$.

On a $P\,(X=2) = P\,((X \geq 2) - (X \geq 3)) = P\,(X \geq 2) - P\,(X \geq 3)$ (car $(X \geq 3) \subset (X \geq 2)$), soit $P\,(X=2) = 1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{2n-(n-1)}{2n} = \frac{n+1}{2n}$.

3. Une suite strictement décroissante de k entiers compris entre 1 et n est uniquement déterminée par la donnée de k entiers compris entre 1 et n et distincts deux à deux, c'est à dire d'une k-combinaison de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Leur nombre est donc $\binom{n}{k}$.

Comme précédemment l'événement $(X \geq k+1)$ se produit lorsque les k premiers numéros des boules forment une suite strictement décroissante. Il y a n^k cas possible pour ces k tirages, donc $P\,(X \geq k+1) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

4. Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ on a comme précedemment $P\,(X=k) = P\,(X \geq k) - P\,(X \geq k+1)$, soit

$P\,(X=k) = \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{n^k}\left[n.\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\right]$; le crochet vaut $n.\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n.n!k-n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n.n!(k-1)+n!(k-1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(k-1)(n+1)}{k!(n-k+1)!}$, donc $P\,(X=k) = \frac{n!(k-1)(n+1)}{n^k k!(n-k+1)!}$.

$\boxed{10}$ **1.** Pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ il y a exactement k jetons portant le numéro bleu k. Le nombre de jetons est donc $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Le couple de VA (B, R) est à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$.

Si $j > i$ on a $P\,((B=i) \cap (R=j)) = 0$ et si $j \leq i$ on a $P\,((B=i) \cap (R=j)) = \{1, 2, \ldots, n\} = \frac{2}{n(n+1)}$ car il y a un seul jeton rouge portant le numéro j et le numéro i sur la face bleue.

3. Le système d'événement $(R=j)_{1 \leq j \leq n}$ étant complet on a $P\,(B=i) = \sum_{j=1}^{n} P\,((B=i) \cap (R=j))$, soit $P(B=i)=\sum_{j=1}^{i} P((B=i)\cap(R=j))=\frac{2i}{n(n+1)}$.

On a $E(B)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^2}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ soit $\boxed{E(B)=\frac{2n+1}{3}}$.

De même on a $P(R=j)=\sum_{i=1}^{n}P((B=i)\cap(R=j))=\sum_{i=j}^{n}P((B=i)\cap(R=j))=\frac{2(n-j+1)}{n(n+1)}$.

On a donc $E(R)=\sum_{j=1}^{n}\frac{2j(n-j+1)}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}j(n-j+1)$. On a $\sum_{j=1}^{n}j(n-j+1)=(n+1)\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $E(R)=n+1-\frac{2n+1}{3}$ soit $\boxed{E(R)=\frac{n+2}{3}}$.

4. On a $E(G)=E(B)-E(R)=\frac{2n+1}{3}-\frac{n+2}{3}=\frac{n-1}{3}$.

D'autre part on a $E(BR)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}ijP((B=i)\cap(R=j))=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}ij=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i\sum_{j=1}^{i}j=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2(i+1)}{2}$, soit $E(BR)=\frac{1}{n(n+1)}\left[\sum_{i=1}^{n}i^3+\sum_{i=1}^{n}i^2\right]=\frac{1}{n(n+1)}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2n+1}{6}=\frac{3n^2+7n+2}{12}$.

On a donc $cov(BR)=E(BR)-E(B)E(R)=\frac{3n^2+7n+2}{12}-\frac{(2n+1)(n+2)}{9}=\frac{9n^2+21n+6-4\left(2n^2+5n+2\right)}{36}=\frac{n^2+n-2}{36}$.

D'où $V(B-R)=V(B)+V(R)-2cov(B,R)$.

$\boxed{\textbf{11}}$ **1.** Ω est l'ensemble des n-listes (ou des permutations) de $\{1,2,\ldots,n\}$ de cardinal $n!$.

2. Il y-a $n-2$ façons de placer la boule 1 puis $(n-3)!$ de placer les autres boules.

La probabilité est donc $p=\frac{(n-2)(n-3)!}{n!}=\frac{n-2}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{n(n-1)}$.

3. Choix des trois places pour les boules $1,2,3$: $\binom{n}{3}$.

Ce choix étant fait il y-a $(n-3)!$ de placer les autre boules.

Donc $p=\frac{\binom{n}{3}(n-3)!}{n!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{6}$.

4. Les valeurs possibles de X_n sont $\{3,4,\ldots,n\}$.

5. Dénombrons le cardinal de $(X_n\leq k)$. Le nombre de cas favorables est le nombre tirages où figurent les boules n° $1,2,3$ dans les k premier tirages.

On a A_k^3 choix pour le choix des places des boules $1,2,3$. Ce choix étant fait il y-a $(n-3)!$ façons de tirer les autres boules. Donc $P(X_n\leq k)=\frac{A_k^3\times(n-3)!}{n!}=\frac{k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$.

6. Pour $k\in\{3,\ldots,n\}$ on a $P(X_n=k)=P(X_n\leq k)-P(X_n\leq k-1)=\frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$.

Donc

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=3}^{n} kP(X_n = k) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) \\ &= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^{n} \left(k^3 - 3k^2 + 2k\right) \\ &= \frac{3(n+1)}{4}. \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ **1.** L'univers est l'ensemble des 2-combinaisons des $2N+1$ entiers de l'intervalle $\{-N, \ldots, N\}$. Le cardinal de Ω est $\binom{2N+1}{2} = \frac{(2N+1)2N}{2} = N(2N+1)$.

Le tirage des deux entiers étant équiprobable la probabilité d'obtenir deux entiers donnés est donc $\frac{1}{\binom{2N+1}{2}}$ ("nombre de cas favorables sur nombre cas possibles") soit $\frac{1}{(2N+1)N}$.

2. Avec la stratégie 1 B a deux choix dont un seul est gagnant, donc la probabilité de gagner dans ce cas est $\frac{1}{2}$.

3. Le nombre de façons de tirer deux nombres strictements positifs parmi $\{1, 2, \ldots, N\}$ est $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ donc $P(T_{++}) = \frac{\binom{N}{2}}{\binom{2N+1}{2}} = \frac{N(N-1)}{2N(2N+1)}$ soit $\boxed{P(T_{++}) = \frac{N-1}{4N+2}}$.

4. De la même façon on a $P(T_{--}) = \frac{N-1}{4N+2}$ (il y a N nombres entiers strictements négatifs).

Le nombre de façons de tirer un nombre strictement positif est N et celui de tirer un nombre strictement négatif est N donc il y a N^2 façons de tirer un nombre strictement positif et un nombre strictement négatif d'où $P(T_{+-}) = \frac{N^2}{\binom{2N+1}{2}} = \frac{2N^2}{2N(2N+1)}$ soit $\boxed{P(T_{+-}) = \frac{N}{2N+1}}$.

Il y a $2N$ façons de tirer un nombre non nul donc il y a $2N$ façons de tirer deux entiers dans $\{-N, \ldots, N\}$ dont un est nul d'où $P(T_0) = \frac{2N}{\binom{2N+1}{2}} = \frac{4N}{2N(2N+1)}$ soit $\boxed{P(T_0) = \frac{2}{2N+1}}$.

5. Si A tire un 0 il y a deux cas : soit il annonce "0" à B et celui-ci a une chance sur 2 de gagner, soit il annonce l'autre nombre choisi et alors B gagne à coup sûr (car si le nombre choisi par A est > 0 B annonce que c'est le maximum et s'il est < 0 il annonce que c'est le minimum).

Le système d'événements $(0, \overline{0})$ étant complet, on a, d'après la formule des probabilités totales : $P_{T_0}(G) = P(0) \times P_0(G) + P(\overline{0}) \times P_{\overline{0}}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$.

6. Le système d'événements $(T_{++}, T_{--}, T_{+-}, T_0)$ étant complet, on a, d'après la formule des probabilités totales : $P(S_2) = P(T_{++}) \times P_{T_{++}}(S_2) + P(T_{--}) \times P_{T_{--}}(S_2) + P(T_{+-}) \times P_{T_{+-}}(S_2) + P(T_0) \times P_{T_0}(S_2)$.

On a $P_{T_{++}}(S_2) = P_{T_{--}}(S_2) = \frac{1}{2}$ et $P_{T_{+-}}(S_2) = 1$ donc $P(S_2) = \frac{N-1}{4N+2} \times \frac{1}{2} + \frac{N-1}{4N+2} \times \frac{1}{2} + \frac{N}{2N+1} \times 1 + \frac{2}{2N+1} \times \frac{3}{4}$ d'où $\boxed{P(S_2) = \frac{3N+2}{2(2N+1)}}$.

Pour tout N on a $\frac{3N+2}{2(2N+1)} > \frac{1}{2}$ donc la deuxième stratégie est meilleure.

Quand N tend vers l'infini, $P(S_2)$ tend vers $\frac{3}{4}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ **1.** Le système d'événements (A_n, B_n) étant complet, on a, d'après la formule des probabilités totales : $P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$, soit $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$.

De même on obtient $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$.

2. Pour tout n on a : $a_n + b_n = 1$, donc $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n)$, soit $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}$.

La suite (a_n) est donc une suite arithmético-géométrique. Le point fixe de l'application $x \longmapsto \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ est $\frac{1}{2}$ donc la suite $\left(a_n - \frac{1}{2}\right)$ est une suite géometrique de raison $\frac{1}{3}$, d'où : $a_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n.

Comme $a_0 = 1$ il vient : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, et $b_n = 1 - a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Quand n tend vers l'infini les suites (a_n) et (b_n) tendent vers $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ **1. a.** On tire simultanément 5 boules parmi 15 sans tenir compte de l'ordre et sans répétitions donc le nombre de tirages possibles est $\binom{15}{5} = 3003$

b. Il y a $\binom{5}{2}$ façons de choisir 2 boules blanches parmi 5 et $\binom{10}{3}$ façons de choisir 3 boules noires parmi 10 donc on a $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3} = 1200$ tirages possibles.

2. a. Ici on tient compte de l'ordre il peut y avoir répétitions (le tirage s'effectuant avec remise) donc il y a 10^5 tirages possibles (nombre de 5-listes de 10 boules).

b. On choisit d'abord 2 boules blanches et 3 boules noires : $5^2 \times 10^3$ choix possibles.

Il y a $\binom{5}{2}$façons de choisir le numéro de sortie des boules blanches ce qui détermine les numéros de sortie des boules noires. Il y a donc $5^2 \times 10^3 \times \binom{5}{2} = 250\,000$ tirages possibles.

3. a. Pour l[er] premier tirage il y a deux choix : blanche ou noire; idem pour les quatre autres tirages donc il y a $2^5 = 32$ tirages possible (nombre de 5-listes de $\{B, N\}$).

b. Il y a $\binom{5}{2} = 10$ façons de choisir le numéro de sortie des boules blanche donc il y a 15 tirages possibles.

$\boxed{\mathbf{15}}$ **1.** Les événements $(X_1 = i)$ et $(X_2 = j)$ sont indépendants, donc $P\left((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\right) = P\left(X_1 = i\right) \asymp P\left(X_2 = j\right)$. On a $P\left(X_1 = i\right) = \frac{1}{n}$ et $P\left(X_2 = j\right) = \frac{2j}{n(n+1)}$ car l'urne 2 comporte $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ boules dont j comportent le numéro j.

On a donc $\boxed{P\left((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\right) = \frac{2j}{n^2(n+1)}}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

2. Le système $(X_2 = j)_{1 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements.

On a donc $P\left(G\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} P\left(G \cap (X_2 = j)\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} P\left(X_2 = j\right) \asymp P_{(X_2 = j)}\left(G\right)$ d'après la formule des probabilités totales.

Or l'événement "G sachant $(X_2 = j)$" est "$X_1 \leq j - 1$" (la boule tirée de l'urne 1 doit avoir un numéro $<$ à j), donc $P_{(X_2=j)}\left(G\right) = \frac{j-1}{n}$.

On a donc $P\left(G\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{2j}{n(n+1)}.\frac{j-1}{n} = \frac{2}{n^2(n+1)} \sum\limits_{j=1}^{n} .j\left(j - 1\right)$.

D'autre part $\sum\limits_{j=1}^{n} .j\left(j - 1\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} j^2 - \sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

On a donc $\boxed{P\left(G\right) = \frac{2(n-1)}{3n}}$.

3. On a $E\left(X_1\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} i.P\left(X_1 = i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{n+1}{2}$ et $E\left(X_2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} i.P\left(X_2 = i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} i.\frac{2i}{n(n+1)}$, soit $E\left(X_2\right) = \frac{2}{n(n+1)} \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n+1}{3}$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ **1.** X_1 suit une loi binômiale de paramètre $\left(5, \frac{1}{3}\right)$.

On a donc $P\left(X_1 = k\right) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$ pour $0 \leq k \leq 5)$ et $E\left(X_1\right) = 5.\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ et $V\left(X_1\right) = 5.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{10}{9}$.

2. Chacune des 5 personnes s'arrêtant à un et un seul étage on a donc $X_1+X_2+X_3=5$.

On a donc $(X_1=0)\cap(X_2=0)=(X_3=5)$ et $P((X_1=0)\cap(X_2=0))=P(X_3=5)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$.

Dire que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois signifie que les 5 personnes vont au même étage : c'est donc l'événement $(X_1=5)\cup(X_2=5)\cup(X_3=5)$ donc $P((X_1=5)\cup(X_2=5)\cup(X_3=5))=P(X_1=5)+P(X_2=5)+P(X_3=5)=3.\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{81}$.

4. a. Z prend les valeurs $1,2$ ou 3.

b. On a $P(Y_1=0)=P(X_1=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

On a donc $P(Y_1=1)=1-P(Y_1=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5$, et $E(Y_1)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{211}{243}$.

c. On a $Z=Y_1+Y_2+Y_3$ donc $E(Z)=E(Y_1)+E(Y_2)+E(Y_3)=3\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right)=\frac{211}{81}$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ **1.** Pour $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ il y a exactement k jetons portant le numéro bleu k. Le nombre de jetons est donc $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Le couple de VA (B,R) est à valeurs dans $\{1,2,\ldots,n\}\times\{1,2,\ldots,n\}$.

Si $j>i$ on a $P((B=i)\cap(R=j))=0$ et si $j\leq i$ on a $P((B=i)\cap(R=j))=\frac{2}{n(n+1)}$ car il y a un seul jeton rouge portant le numéro j et le numéro i sur la face bleue.

3. Le système d'événement $(R=j)_{1\leq j\leq n}$ étant complet on a $P(B=i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}P((B=i)\cap(R=j))$,

soit $P(B=i)=\displaystyle\sum_{j=1}^{i}P((B=i)\cap(R=j))=\frac{2i}{n(n+1)}$.

On a $E(B)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^2}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ soit $\boxed{E(B)=\frac{2n+1}{3}}$.

$V(B)=E(B^2)-(E(B))^2=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^3}{n(n+1)}-\left(\frac{2n+1}{3}\right)^2=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{(2n+1)^2}{9}$, soit $V(B)=\frac{2}{n(n+1)}.\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(2n+1)^2}{9}$ soit $\boxed{V(B)=\frac{n^2+n-2}{18}=\frac{(n-1)(n+2)}{18}}$.

De même on a $P(R=j)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P((B=i)\cap(R=j))=\sum_{i=j}^{n}P((B=i)\cap(R=j))=\frac{2(n-j+1)}{n(n+1)}$.

On a donc $E(R)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{2j(n-j+1)}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}j(n-j+1)$. On a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j(n-j+1)=(n+1)\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $E(R)=n+1-\frac{2n+1}{3}$ soit $\boxed{E(R)=\frac{n+2}{3}}$.

On a $V(R)=E(R^2)-(E(R))^2$ et $E(R^2)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{2(n-j+1)j^2}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)j^2=\frac{2}{n(n+1)}\left[(n+1)\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}j^3\right]=\frac{(n+1)(n+2)}{6}$, d'où soit $V(R)=\frac{(n+1)(n+2)}{6}-\left(\frac{n+2}{3}\right)^2$ soit $\boxed{V(R)=\frac{(n+2)(n-1)}{18}}$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ **1. a.** Soit l'événement N_i :"on choisit l'urne i" et B "la boule tirée est blanche".

Le système $(N_i)_{1\leq i\leq N}$ formant un système complet d'événements on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B)=\sum_{i=1}^{N}P(N_i)\times P_{N_i}(B).$$

On a $P(N_i) = \frac{1}{N}$ et $P_{N_i}(B) = \frac{i}{N}$ (car l'urne N_i contient i boules blanche). On a donc $P(B) = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} i = \frac{1}{N^2}\frac{N(N+1)}{2}$, soit $\boxed{P(B) = \frac{N+1}{2N}}$ qui tend vers $\frac{1}{2}$ quand N tend vers l'infini.

b. De même soit l'événement et B_2 "les deux boules tirées sont blanches".

On a $P(B_2) = \sum_{i=1}^{N} P(N_i) \asymp P_{N_i}(B_2)$ et $P_{N_i}(B_2) = \frac{i^2}{N^2}$ donc $P(B_2) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}.\frac{i^2}{N^2} = \frac{1}{N^3}\sum_{i=1}^{N} i^2$.

Comme $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ on obtient : $\boxed{P(B) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6N^2}}$ qui tend vers $\frac{1}{3}$ quand N tend vers l'infini.

2. Soit l'événement et B_n "les n boules tirées sont blanches". On a $P(B_n) = \sum_{i=1}^{N} P(N_i) \asymp P_{N_i}(B_n)$.

L'urne N_i comportant N boules le nombre de cas possible de tirer n boules sans remise est N^n et le nombre de cas favorables est k^n car l'urne N_i comporte k boules blanches.

On a donc $p(n, N) = P(B_n) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}.\left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N^{n+1}}\sum_{i=1}^{N} k^n$.

3. On a $P(n, N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$. On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $f : x \mapsto x^n$. Sa limite quand N tend vers l'infini est donc $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc $\boxed{\lim_{N\to\infty} P(n, N) = \frac{1}{n+1}}$.

19 **1.** On peut prendre pour univers Ω l'ensemble des $n+1$-liste des n boules (il y a des répétitions et l'ordre compte puisque les tirages se font successivement).

On a donc $|\Omega| = n^{n+1}$.

Les valeurs prises par X sont $2, 3, \ldots, n+1$.

Remarque : les tirages se faisant au hasard on est dans le cas d'équiprobabilité.

2. L'événement $X = 2$ correspond aux tirages commençant par i, i avec $i \in \{1, 2, \ldots n\}$.

Il y-a n façons de choisir les deux premiers tirages puis n^{n-1} de choisir les $n-1$ autres tirages donc le nombre de cas favorables de l'événement $X = 2$ est $n \times n^{n-1}$, donc $P(X = 2) = \frac{n \times n^{n-1}}{n^{n+1}}$, soit $\boxed{P(X = 2) = \frac{1}{n}}$.

L'événement $X = n+1$ correspond aux tirages dont les n premiers numéros sont distincts deux à deux et le dernier tirage est quelconque : le nombre de cas favorables est donc $n! \times n$. On a donc $P(X = n+1) = \frac{n! \times n}{n^{n+1}} = \frac{n!}{n^n}$.

3. L'événement $X > k$ correspond aux tirages dont les numéros des k premières boules sont distincts deux à deux et il y a $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (nombre de k arrangements de $\{1, 2, \ldots, n\}$) façons de choisir de telles suites et le nombre de façons de choisir les $n+1-k$ autres boules est n^{n+1-k}, donc le nombre de cas favorables de l'événement $X > k$ est $\frac{n! \times n^{n+1-k}}{(n-k)!}$, donc $\boxed{P(X > k) = \frac{n! \times n^{n+1-k}}{(n-k)! \times n^{n+1}} = \frac{n!}{(n-k)! \times n^k}}$.

On a $P(X > 0) = P(X > 1) = 1$ donc la formule précédent est valable pour $k = 0$ et $k = 1$.

4. On a $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$, donc $P(X = k) = \frac{n!}{(n-k+1)! \times n^{k-1}} - \frac{n!}{(n-k)! \times n^k}$, donc $P(X = k) = n!\left[\frac{n-(n-k+1)}{(n-k+1)! \times n^k}\right] = \frac{n!(k-1)}{(n-k+1)! \times n^k}$.