

Index des problèmes

• Nombres réels ; inégalités

NR1 Inéquations dans \mathbb{R}

NR2 Inégalité $1 - x^n \leq n(1 - x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1]$ démontrée de trois façons

NR3 Inégalité $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$ pour $a_k > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

NR4 $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ pour A et B parties majorées de \mathbb{R}

• Arithmétique; dénombrement

AR1 Formule de Poincaré et nombre de dérangements

AR2 Nombre de surjections d'un ensemble fini dans un autre

AR3 Un problème de dénombrement

AR4 Nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$ d'inconnues x_1, x_2, \dots, x_p dans \mathbb{N}

AR5 Formule d'inversion de Pascal

• Suites réelles

SR1 Equivalent de la suite $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

SR2 $[0, 1]$ n'est pas dénombrable

SR3 Deux suites convergeant vers $\sqrt{2}$

SR4 Calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

SR5 Calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x \ln(x)}{1-x} dx$

• Suites; fonctions

SF1 Fonctions lipschitziennes

SF2 Suite (x_n) définie implicitement par $\ln x_n + x_n = n$; équivalent et développement asymptotique

SF3 Suite (p_n) définies par $p_n = \prod_{k=1}^n u_k = u_1 \cdot u_2 \dots u_n$

SF4 Suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$ et équivalent

SF5 $f(x) = x \cos^2 x$ et étude d'une suite récurrente

SF6 $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\arctan t}{t}$ et étude d'une suite récurrente

• Suites et intégrales

SI1 Suite $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$; équivalent

SI2 Suite $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$; développement asymptotique

SI3 Formule de Stirling

SI4 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

SI5 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

SI6 $I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$ et $U_n = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du$

SI7 Deux preuves de l'irrationalité de e

SI8 Irratinnalité de π

• Equations fonctionnelles

- EF1** Equation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2[f(x) + f(y)]$
- EF2** Equation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(\varphi(x))$ avec φ lipschitzienne
- EF3** Equation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) = \frac{g(x) + g(y)}{1 + g(x)g(y)}$
- EF4** Equation fonctionnelle : $\forall x \in]-1, 1[, f\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right) = (1 - x^2)f(x)$ et f continue en 0
- EF5** Equation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$
- EF6** Equations fonctionnelles : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$

EF7 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$

EF8 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) + kxy$

• **Etudes de fonctions**

FC1 $f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right|$

FC2 $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x} e^{\frac{1}{x}}$

FC3 $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$

FC4 $f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

FC5 $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$

FC6 $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sh}(x)}$ et prolongement par continuité

FC7 $f_n(x) = xe^{-\frac{x}{n}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$; developpement asymptotique; étude d'une suite et équivalence

• **Fonctions définies par une intégrale**

FI1 $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \arctan(t)}$

FI2 $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln|t|}$

FI3 $F(x) = \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$

FI4 $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{t^2 - 1}{(1 + t^2)\sqrt{1 + t^4}} dt$

FI5 $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$

FI6 $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t} dt$

FI7 $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1 + t^2} dt$; calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

• **Equations différentielles**

ED1 $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$

• **Nombres complexes**

NC1 Application f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f(z) = 2z(1 - z)$

• **Nombres complexes et géométrie**

NCG1 Configuration dans un parallélogramme

NCG2 Point de Torricelli ou de Fermat d'un triangle

NCG3 Propriétés d'un triangle

• **Probabilités**

P1 Jeu à deux participants

P2 Tirage dans une urne

P3 Tirage dans une urne

P4 Une pièce de monnaie et deux urnes

- **Géométrie**

- G1** Distance de deux droites dans l'espace; tétraèdres orthocentriques
- G2** Points équidistants de deux droites dans l'espace
- G3** Distance d'un point à un plan
- G4** Perpendiculaire commune à deux droites
- G5** Dilatation affines
- G6** Ensemble de points du plan
- G7** Configuration dans un triangle; rotations du plan

- **Espaces vectoriels; matrices**

- EV1** Endomorphismes u tels que $u \circ u = 0$
- EV2** Affinités d'un espace vectoriel
- EV3** Etude de l'endomorphisme de l'espace vectoriel des fonctions continues qui à f associe $x \mapsto$
- EV4** Etude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables
- EV5** Endomorphismes f tels que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$
- EV6** δ -décomposition d'une matrice

- **Polynômes**

- PO1** Etude d'une famille de polynômes

- PO2** Etude des polynômes $P(X) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}$ et calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

- **Polynômes et espaces vectoriels**

- PEV1** Suite de polynômes (P_n) tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$
- PEV2** Endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe $Q(X) = (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X)$
- PEV3** Suite de polynômes (P_n) tels que $\forall z \in \mathbb{C}^*, P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$
- PEV4** Suite de polynômes (T_n) tels que $T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$; décompo
- PEV5** Polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$; endomorphisme qui à P le reste de la division euclidienne d
- PEV6** Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à $P(X)$ associe $P(X+1) - P(X)$; calcul de $\sum_{k=0}^n k^p$ pour $p =$

- **Matrices**

- M1** Calcul de la puissance n -ième de $A = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de plusieurs façons
- M2** Etude d'un sous-espace vectoriel de $M_{\mathbb{R}}(n, n)$
- M3** δ -décomposition d'une matrice
- M4** Calcul de la puissance n -ième d'une matrice; sous-espace vectoriel de $M_{\mathbb{R}}(n, n)$
- M5** Calcul de la puissance n -ième d'une matrice de 2 façons et applications
- M6** Calcul de la puissance n -ième d'une matrice et applications
- M7** Etude d'un sous-espace vectoriel de $M_{\mathbb{R}}(n, n)$; puissance n -ième d'une matrice
- M8** Ensemble de vecteurs faisant un angle constant entre eux

- **Déterminants**

- D1** Calcul de $D_n = \begin{vmatrix} \lambda & a & \dots & a \\ b & \lambda & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \lambda \end{vmatrix}$

- **Espaces vectoriels euclidiens**

- EVE1** Produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ et base orthonormée
- EVE2** Projection orthogonale sur une sous-espace vectoriel et applications
- EVE3** Produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}dt$ et base orthonormée
- EVE4** Produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$
- EVE5** Etude des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien
- EVE6** Etude des endomorphismes antisymétriques d'un espace euclidien
- EVE7** f de l'espace tels que $f(\vec{x}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{v} + \beta\vec{x}$
- EVE8** Matrices orthogonales; produits scalaires de \mathbb{R}^3
- EVE9** Produit scalaire dans l'espace vectoriel des matrices carrées défini par $\varphi(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$
- EVE10** un produit scalaire dans $C^2[-1, 1]$ défini par $\varphi(f, g) = f(-1) \times g(-1) + f(1) \times g(1) + \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$
- EVE11** un produit scalaire dans $C^\infty[-1, 1]$ défini par $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)^\alpha dt$
- EVE12** endomorphismes de l'espace définis par $f_\lambda(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u}$ et $r(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u}$

• **Problèmes de synthèse**

- PS1** Fonction et suite définies par une intégrale; calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
- PS2** Etude de fonction; calcul approché d'une intégrale; équation différentielle
- PS3** Calcul approché de π à l'aide de la fonction arctangente
- PS4** Etude de fonctions; fonction définie par une intégrale; équation différentielle
- PS5** Etude de fonction; équation différentielle; suite; fonction définie par une intégrale
- PS6** Suites; intégrales; calcul de la somme d'une série
- PS7** Etude de la fonction $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$; équation différentielle; polynômes; algèbre linéaire
- PS8** Fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\arctan t}{t}$; suite récurrente
- PS9** Suites définies par une intégrale
- PS10** Suites, équation différentielle; algèbre linéaire
- PS11** Approximation d'une fonction lipschitziennes par des polynômes
- PS12** $f_\lambda(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1+x^2}$; fonction définie par une intégrale; suite