

SF1 Fonctions lipschitziennes

Une fonction f d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x et y de I on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad (\text{on notera que le réel } k \text{ dépend de } f).$$

1. Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ mais pas sur $[0, 1]$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose f dérivable sur I .

Montrer que f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I .

(utiliser le théorème des accroissements finis).

Soit α un réel strictement positif. On dit que f est lipschitzienne d'ordre α si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x et y de I on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha.$$

5. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que si f est lipschitzienne d'ordre $\alpha > 1$ alors f est constante sur I .

Correction : 1. Soient f et g deux fonction lipschitziennes sur I . Il existe donc deux réels k et k' tels que, pour tous réels x et y on ait : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ et $|g(x) - g(y)| \leq k'|x - y|$.

On a : $|(f + g)(x) - (f + g)(y)| = |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|$, soit $|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ (inégalité triangulaire), donc $|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq k|x - y| + k'|x - y| = (k + k')|x - y|$, donc $f + g$ est lipschitziennes sur I .

2. Pour tous réels x et $y \geq 1$ on a : $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right|$ ("expression conjuguée"). D'autre part on a $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$ donc $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}$. En multipliant par $|x - y|$ (≥ 0) il vient $\left| \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ soit $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

Conclusion : la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.

Supposons que $x \mapsto \sqrt{x}$ soit lipschitzienne sur $[0, 1]$. Alors : $\exists k \in [0, 1] / \forall x, y \in [0, 1], |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$. Pour $y = 0$ et $x \in [0, 1]$ on obtient $\sqrt{x} \leq kx$, soit $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$ pour $x \in]0, 1]$. Cette inégalité est impossible car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Conclusion : la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.

3. Soit x et y réels tels que $x > y$. La fonction $\arctan$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ il existe $c \in]x, y[$ tel que $\arctan(x) - \arctan(y) = (\arctan)'(c)(x - y)$. Or $(\arctan)'(c) = \frac{1}{1+c^2} \leq 1$, donc $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$ (égalité encore valable si $x = y$).

Conclusion : la fonction $\arctan$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

4. $\Rightarrow$: supposons f dérivable et lipschitzienne sur I . Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x et y de I on a $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Pour $x \neq y$ on a $\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq k$ et en faisant tendre y vers x on obtient (f étant dérivable en x) et par conservation des inégalités par passage à la limite $|f'(x)| \leq k$ donc f est bornée sur I .

$\Leftarrow$: supposons f dérivable et f' bornée sur I . Il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$.

En appliquant comme en 3/ le théorème des accroissements finis à f sur $[x, y]$ on obtient : $\exists c \in]x, y[/ |f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|$, donc $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$. Donc f est lipschitzienne sur I .

5. Montrons que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pour tout réels x et y positifs.

On a, si $0 \leq y \leq x$: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \iff |\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |x - y|$ (en élevant au carré les deux membres)

$\iff x + y - 2\sqrt{xy} \leq x - y \iff y \leq \sqrt{xy} \iff y^2 \leq xy \iff y(x - y) \geq 0$, inégalité vraie.

On a donc : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x - y|^{1/2}$, i.e. $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

6. Supposons f est lipschitzienne d'ordre $\alpha > 1$ sur I .

On a $\forall (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$ donc pour $x \neq y$, $0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq k|x - y|^{\alpha-1}$.

Faisons tendre y vers x : $k|x - y|^{\alpha-1} \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$ (car $\alpha > 1$) donc, d'après le théorème de l'étau,

$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = 0$. f est donc dérivable en x et $f'(x) = 0$ pour tout réel x . f est donc constante sur l'intervalle I .