On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

1. Représenter graphiquement les premiers termes de cette suite.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Montrer que pour tout entier naturel p non nul on a : $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Retrouver la limite de la suite (u_n).

On veut trouver dans les questions suivantes un équivalent de (u_n).

4. En remarquant que pour tout entier naturel n on a : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$, montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on a :

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

5. En utilisant l'inégalité $\frac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ valable pour tout entier k supérieur ou égal à 2 montrer que :

$$\forall n \geq 2, \frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln n.$$

Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est équivalente à $\frac{1}{n}$.

Correction :

1. La représentation graphique classique donne un "escalier qui descend" : on conjecture que la suite (u_n) est tend vers 0 en décroissant.

De plus on a $f'(x) = \frac{(1-x^2)}{(x^2+x+1)^2}$ donc f est décroissante sur $[0, 1]$.

On montre d'abord par récurrence que pout tout n on a $P(n) : 0 \leq u_n \leq 1$.

La propriété est vraie au rang 0. Si elle est vraie pour un entier n donné on a : $0 < u_n \leq 1$ donc $f(0) < f(u_n) \leq f(1)$ (car f croissante sur $[0, 1]$) donc $0 < u_{n+1} \leq 1/3 < 1$ et $P(n+1)$ est vraie.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1$.

De plus, pour tout entier naturel n, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2+u_n+1} < 1$ (car $u_n > 0$) donc la suite (u_n) est (strictement) décroissante car à termes > 0. Comme elle est minorée par 0 elle est convergente. Si l est sa limite on obtient par passage à la limite : $l = \frac{l}{l^2+l+1}$ soit $l(l^2 + l + 1) = l$ ce qui équivaut à $l^2(l+1) = 0$, dont les solutions sont $l = 0$ ou $l = -1$. Comme (u_n) est une suite à termes positifs on a $l \geq 0$ donc finalement $\boxed{\lim u_n = 0}$.

2. Pour tout entier naturel non nul p on a : $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1/p}{(1/p)^2+1/p+1} = \frac{p}{1+p+p^2} \leq \frac{p}{p+p^2}$ (car $1 + p + p^2 \geq p + p^2$) soit $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$.

3. Soit la propriété $P(n)$: "$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$". $P(0)$ est vraie car $u_0 = 1 \leq 1$.

Si elle est vraie pour un entier n donné on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$ donc $f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$ (car f croissante sur $[0, 1]$) et comme $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$ (question précédente) on a $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$ et $P(n+1)$ est vraie.

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}}$.

D'après le théorème de l'étau on retrouve que la suite (u_n) tend vers 0.

4. Soit la propriété $P(n)$: $\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. $P(1)$ est vraie car $u_1 = \frac{1}{3}$.

Supposons qu'elle soit vraie pour un entier n donné. On a $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$ et $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ (2/) et $\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (hypothèse de récurrence) donc $\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}+1+n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n+2+\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ et $P(n+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

5. En sommant les inégalités $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ pour $k = 2$ à n il vient : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+\ln n$ pour $n \geq 2$. D'après la question précédente on a donc $\boxed{\forall n \geq 2, \frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln n}$.

On en déduit que $u_n \geq \frac{1}{n+2+\ln n}$ pour $n \geq 2$ et d'après la question 3/ on obtient l'encadrement :

$$\forall n \geq 2, \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+2+\ln n}.$$

En mulitipliant par n : $\frac{n}{n+1} \leq n u_n \leq \frac{n}{n+2+\ln n}$. Or $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ et $\frac{n}{n+2+\ln n} = \frac{1}{1+2/n+\ln n/n} \longrightarrow 1$ (car $\frac{\ln}{n} \longrightarrow 0$) donc, d'après le théorème de l'étau : $\lim n u_n = 1$ soit $\lim \frac{u_n}{1/n} = 1$ ou encore $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$.