On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = x\cos^2 x.$$

Première Partie

1. Sans calculs justifier que f atteint un maximum sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Soit φ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x) = x\tan x$.

Montrer que l'équation $x\tan x = \frac{1}{2}$ a une unique solution α sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Préciser le signe de $\varphi(x) - \frac{1}{2}$.

3. Etudier rapidement f (on écrira $f'(x)$ sous la forme $g(x) . \left(\frac{1}{2} - \varphi(x)\right)$).

Préciser le maximum de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deuxième Partie

On veut calculer dans cette partie une valeur approchée de α. On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $x\tan x = \frac{1}{2}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

4. Montrer que α est solution du système $\begin{cases} x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ x = \arctan\frac{1}{2x} \end{cases}$.

On considère la suite récurrente (x_n) définie par $x_0 = 0,6$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \arctan\frac{1}{2x_n}$.

5. On rappelle que pour tout réel x strictement positif on a :

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Montrer et pour tous réels x et y strictement positifs :

$$\left|\arctan(2x) - \arctan(2y)\right| = \left|\arctan\left(\frac{1}{2x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2y}\right)\right|.$$

6. Montrer pour tous réels x et y strictement positifs tels que $x < y$ on a :

$$\left|\arctan(2x) - \arctan(2y)\right| \leq \frac{2\left|x-y\right|}{1+4x^2}.$$

7. On admet que pour tout entier n on a x_n et α sont supérieur ou égaux à $0,6$.

Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $]0,1[$ tel que pour tout entier n :

$$\left|x_{n+1} - \alpha\right| \leq k\left|x_n - \alpha\right|.$$

Conclure sur la convergence de la suite (x_n).

Correction :

Première Partie

1. La fonction f est continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc elle est bornée et elle atteint son maximum sur cette intervalle.

2. φ est continue et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme somme et produit de fonctions continues et dérivables et : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \varphi'(x) = \tan x + x\left(1 + \tan^2 x\right)$. On a $\varphi'(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc φ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \varphi(x) = +\infty$ alors φ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. Comme $\frac{1}{2} \in [0, +\infty[$, l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ a une unique solution : l'unique antécédent de $\frac{1}{2}$ par φ, i.e. $\alpha = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Il résulte du tableau de variation de φ que $\varphi(x) - \frac{1}{2} < 0$ sur $[0, \alpha[$ et $\varphi(x) - \frac{1}{2} > 0$ sur $\left]\alpha, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions dérivables et : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \cos^2 x - 2x \cos x \sin x$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $f'(x) = 2\cos^2 x \left(\frac{1}{2} - x \tan x\right)$, soit $f'(x) = 2\cos^2 x \left(\frac{1}{2} - \varphi(x)\right)$, du signe de $\frac{1}{n} - \varphi(x)$. D'après 2/ on a donc le tableau de variation de f :

f admet donc en α un maximum.

Deuxième Partie

4. Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $x \tan x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \tan x = \frac{1}{2x} \Longleftrightarrow \arctan(\tan x) = \arctan \frac{1}{2x}$. Comme $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\arctan(\tan x) = x$. L'équation $x \tan x = \frac{1}{2}$ est donc équivalente à $x = \arctan \frac{1}{2x}$ et $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

5. Pour x et $y > 0$ on a $\arctan\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{2y}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2y)$, d'où $\arctan(2x) - \arctan(2y) = \arctan\left(\frac{1}{2x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2y}\right)$.

6. On applique le théorème des accroissement fini à la fonction arctan sur l'intervalle $[2x, 2y]$ (arctan étant dérivable sur cet intervalle) : $\exists c \in]2x, 2y[\,/ \arctan(2x) - \arctan(2y) = \frac{2x-2y}{1+c^2}$. D'autre part on a : $2x < c < 2y \Longrightarrow 1 + 4x^2 < 1 + c^2 < 1 + 4y^2 \Longrightarrow \frac{1}{1+4y^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+4x^2}$. On a donc : $|\arctan(2x) - \arctan(2y)| = \frac{2|x-y|}{1+c^2} < \frac{2|x-y|}{1+4x^2}$ pour $0 < x < y$.

7. Pour tout entier naturel n on a : $|x_{n+1} - \alpha| = \left|\arctan\left(\frac{1}{2x_n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\right|$ (car $\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$ donc $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$ d'après 4/), soit $|x_{n+1} - \alpha| = |\arctan(2x_n) - \arctan(2\alpha)|$ (d'après 5/).

Comme x_n et α sont supérieurs à $0,6$ on a, d'après 6/ : $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2|x_n - \alpha|}{1+4\times 0{,}6^2} = \frac{1}{1{,}22} |x_n - \alpha|$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - \alpha| \leq k |x_n - \alpha|$ avec $k = \frac{1}{1{,}22} \in]0, 1[$.

Par une récurrence évidente on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha| = k^n |0, 6 - \alpha|$.

Comme $k \in]0, 1[$ on a $k^n \longrightarrow 0$ donc $|x_n - \alpha| \longrightarrow 0$ (d'après le théorème de l'étau) soit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha}$.