Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. A l'aide d'une intégration par parties montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw = -\frac{1}{2} t^2 f'(t).$$

(On pourra écrire $\frac{w^2}{(1+w^2)^2} = w.\frac{w}{(1+w^2)^2}$).

4. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

En déduire que : $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq f(t) \leq 1$.

Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(0) = 1$ et, pour tout x non nul, $\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$.

5. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$ (on pourra commencer par supposer $x > 0$ et utiliser la question 4/).

7. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))$.

8. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

En déduire celui de φ à l'ordre 2 en 0, puis celui de $\varphi'(x)$ à l'ordre 1 en 0.

9. Montrer que φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = 0$. Donner le tableau de variation de φ sur $\mathbb{R}_+$.

(On ne demande pas la limite en plus ou moins l'infini).

10. Montrer que si $x \geq 1$, on a $0 \leq \int_1^x f(t)\, dt \leq \frac{\pi}{2}\ln(x)$.

En déduire la limite de φ en $+\infty$.

11. Tracer le graphique de φ dans le même repère que celui de f.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ (φ est l'application définie en 5/).

12. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x))$.

13. Montrer que : $\forall x > 0, x(1 - f(x)) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

En déduire que $\forall x > 0, |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

14. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

15. Déduire des questions précédentes que pour tout réel x strictement positif on a

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4},$$

et que cette inégalité reste vérifiée pour tout réel x.

16. Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

On note α cette solution.

Soit la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour tout entier naturel n.

17. Prouver que pour tout entier naturel n on a

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

On considère l'équation différentielle : $x^2 y' + xy = \arctan x$.

18. Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}^*$?

19. Montrer que φ est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

<u>*Correction*</u> :

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues. D'autre part, au voisinage de 0, on a : $f(t) \sim \frac{t}{t} = 1$, donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$, donc f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. De même f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables et : $\forall t \in \mathbb{R}^*, f'(t) = \frac{t/\left(1+t^2\right)-\arctan t}{t^2} = \frac{t-\left(1+t^2\right)\arctan t}{t^2(1+t^2)}$. Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}^*$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, au voisinage de 0 on a : $f'(t) \sim \frac{t-\left(1+t^2\right)\arctan t}{t^2}$. Or $\arctan t = t + o(t^2)$, donc $\frac{t-\left(1+t^2\right)\arctan t}{t^2} = \frac{o\left(t^2\right)}{t^2} = o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $f'(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. D'après le théorème "limite-dérivée" f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. De plus $f'(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$ donc f' est continue en 0.

Conclusion : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. On intègre par parties $I = \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw$ en posant $u = w$ et $v' = \frac{w}{(1+w^2)^2}$; $u' = 1$, $v = -\frac{1}{2(1+w^2)}$ (u et v étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$). On obtient : $I = \left[-\frac{w}{2(1+w^2)}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{dw}{1+w^2} = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t$. On a donc, pour $t \neq 0$, $I = -\frac{1}{2}t^2\left[\frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan t}{t^2}\right]$, soit $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)}$ (cette formule étant valable aussi pour $t = 0$).

Pour $t \geq 0$ on a $\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw \geq 0$ donc $f'(t) \leq 0$ d'après la relation précédente et f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme f est paire elle est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

4. Du tableau de variation de f il résulte que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq f(t) \leq 1}$.

5. L'application f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet une primitive F et donc $\varphi(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x}$ pour tout $x \neq 0$ Donc la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (F étant dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$).

D'autre par $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(0)$ (car F dérivable en 0), soit $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \varphi(x) = f(0) = 1$.

Comme $\varphi(0) = 1$ alors φ est continue en 0. *Conclusion :* φ est continue sur $\mathbb{R}$.

D'autre part en posant $u = -t$ dans $\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ on obtient (si $x \neq 0$) $\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^{-x} f(-u)(-du) = \frac{1}{-x}\int_0^{-x} f(u)\,du$ (car f paire) donc $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Conclusion : φ est paire.

6. D'après 4/ on a $f(t) \leq 1$, donc, en intégrant entre 0 et x (pour $x > 0$) on en déduit que $\leq x$ soit, en divisant par x, $\varphi(x) \leq 1$ pour $x > 0$.

D'autre part, comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, pour $0 \leq t \leq x$ on a $f(x) \leq f(t)$ et en intégrant entre 0 et x on obtient : $\int_0^x f(x)\,dt \leq \int_0^x f(t)\,dt$, soit $xf(x) \leq \int_0^x f(t)\,dt$. En divisant par $x > 0$: $f(x) \leq \varphi(x)$.

On a donc $\boxed{f(x) \leq \varphi(x) \leq 1}$ pour $x > 0$; comme f et φ sont paires et $f(0) = \varphi(0) = 1$ cette encadrement en valable pour tout réel x.

7. F étant la primitive de f qui s'annule en 0 on a $\varphi(x) = \frac{F(x)}{x}$ donc, pour $x \neq 0$, on a $\varphi'(x) = \frac{f(x)x-F(x)}{x^2} = \frac{f(x)x-x\varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))$.

8. On a $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, donc $f(t) = 1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)$.

En intégrant on obtient $\int_0^x f(t)\,dt = x - \frac{x^3}{9} + o(x^3)$, d'où $\boxed{\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{9} + o(x^2)}$.

D'après la relatio du 7/ on a donc, pour $x \neq 0$: $\varphi'(x) = \frac{1}{x}\left(\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{9} + o(x^2)\right)\right)$, soit $\boxed{\varphi'(x) = -\frac{2x}{9} + o(x)}$.

9. La fonction φ' a un dl à l'ordre 1 en 0, donc φ est dérivable en 0 et $\boxed{\varphi'(0) = 0}$ d'après le dl précédent.

D'après les questions 6/ et 7/ on a $\varphi'(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$, donc φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme φ est paire, φ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

10. pour tour réel t on a $\arctan t \leq \frac{\pi}{2}$ donc, pour $t > 0$ on a $\frac{\arctan t}{1} \leq \frac{\pi}{2t}$. En intégrant entre 1 et x pour $x \geq 1$ on obtient $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} \leq \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{dt}{t}$ soit $\int_1^x \frac{\arctan t}{1} \leq \frac{\pi}{2}\ln(x)$.

Pour $x \geq 1$ on a $0 \leq \varphi(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \frac{\int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt}{x} \leq \frac{C}{x} + \frac{\pi}{2}\frac{\ln(x)}{x}$ (où C est la constante $\int_0^1 f(t)\,dt$). Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0}$ d'après le théorème de l'étau.

11. Le graphique de f est situé en dessous de celui de φ d'après 6/.

12. D'après 7/ on a $|\varphi'(x)| = \frac{1}{x}|f(x) - \varphi(x)| = \frac{1}{x}(\varphi(x) - f(x))$ (car $f(x) \leq \varphi(x)$ par 6/). Comme $\varphi(x) \leq 1$ (d'après 6/) on a $\boxed{\forall x > 0, |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1 - f(x))}$.

13. pour $x > 0$ on a $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = x - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}dt$, soit $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt = x - \arctan x$ ou $\boxed{x(1 - f(x)) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt, \text{ pour } x > 0}$.

14. pour t réel on a $\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2} \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{2t-(1+t^2)}{2(1+t^2)} \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{-(1-t)^2}{2(1+t^2)} \leq 0$, ce qui est toujours vrai. Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}}$.

15. D'après l'inégalité précédente on a $\frac{t^2}{1+t^2} \leq \frac{t}{2}$ pour $t > 0$ et en intégrant entre 0 et x pour $x > 0$, on obtient $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \leq \frac{1}{2}\int_0^x tdt$, soit $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt \leq \frac{x^2}{4}$. D'après 13/ on a donc $0 \leq x(1 - f(x)) \leq \frac{x^2}{4}$ et d'après 12/ : $\boxed{|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}. \text{ pour } x > 0}$.

16. L'application g définie par $g(x) = \varphi(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \varphi'(x) - 1 < 0$ (d'après 15/) donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (car φ tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$). D'après le théorème de la bijection l'équation $\varphi(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

17. Pour tout entier naturel n on a $|u_{n+1} - \alpha| = |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ sur l'intervalle $[0, \alpha]$.

Par récurrence on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Comme la suite $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge vers 0 et que $|u_0 - \alpha|$ est une constante on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

18. Pour $x > 0$ l'équation différentielle est équivalente à $y' + \frac{y}{x} = \frac{\arctan x}{x^2}$.

Les solutions de l'équation homogène sont $y(x) = C'e^{-\ln|x|} = \frac{C}{x}$.

On cherche une solution particulière de la forme $y(x) = \frac{C(x)}{x}$ (méthode de "variation de la constante"). En reportant dans l'équation on obtient $\frac{C'(x)}{x} = \frac{\arctan x}{x^2}$, soit $C'(x) = \frac{\arctan x}{x}$. On peut donc prendre $C(x) = x\varphi(x)$ et une solution particulière est donc $y(x) = \varphi(x)$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc $y(x) = \frac{C}{x} + \varphi(x)$ si $x > 0$. De même les solutions pour $x < 0$ sont $y(x) = \frac{C'}{x} + \varphi(x)$.

19. La fonction définie précédemment sur $\mathbb{R}^*$ n'est prolongeable par continuité en 0 ssi $C = C' = 0$. φ est alors le prolongement par continuité de y en 0.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle $x^2y' + xy = \arctan x$ en 0.

Conclusion : φ est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y' + xy = \arctan x$.