Exos Suites et Fonctions

$\boxed{1}$ On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ dans un ensemble à préciser. Donner des propriétés de f^{-1}, bijection réciproque de f, et en donner le tableau de variation.

2. Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]0,1[$ tel que

$$\alpha e^{\alpha} = 1.$$

On définit la suite (u_n) par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout entier naturel n.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.

4. Montrer que pour tout réel x de $[0,1]$ on a $f(x) - x \geq 0$, et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.

Que peut-on en déduire sur le sens de variation de (u_n) ?

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente puis qu'elle converge vers 0.

On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

6. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}.$$

En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.

7. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire que la suite (S_n) est majorée puis qu'elle est convergente.

Soit L sa limite. Montrer que :

$$\alpha \leq L \leq 2.$$

8. Donner un équivalent de (u_n).

$\boxed{2}$ Soit k un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation $\arctan x = x - k\pi$ a une unique solution x_k sur l'intervalle $\left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Trouver le limite de la suite (x_k) et en trouver un équivalent.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} (x_k - k\pi) = \frac{\pi}{2}$.

3. a. Montrer que

$$\arctan(k\pi) < x_k - k\pi < \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

b. Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

c. En déduire que, si on pose $\tau_k = \frac{\pi}{2} - (x_k - k\pi)$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{1}{(k+1/2)\pi}\right) \leq \tau_k \leq \arctan\left(\frac{1}{k\pi}\right).$$

4. Donner un équivalent de τ_k lorsque k tend vers $+\infty$ (s'exprimant simplement en fonction de k).

En déduire que : $x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)$.

Dans la suite on fixe une valeur de k dans $\mathbb{N}^*$ et on cherche une valeur approchée de $\theta_k = x_k - k\pi$.

On définit la fonction f par $f(x) = \arctan(x + k\pi)$. On remarquera que $f(\theta_k) = \theta_k$.

5. Montrer qu'il existe un réel $\delta_k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < f'(x) \leq \delta_k.$$

On définit la suite réelle (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\theta_k - u_{n+1}| \leq \delta_k |\theta_k - u_n|.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers θ_k.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Pour x réel positif ou nul on pose :

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

1. Montrer que pour tout réel positif ou nul on a : $|f(x) - x| \leq x^3$.

En déduire un encadrement de $f(x)$ valable pour $x \geq 0$.

2. Montrer à l'aide d'un encadrement que la suite (y_n) définie pour $n \geq 1$ par : $y_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}{n^6}$ converge vers 0.

3. Déduire des questions précédentes que la suite (x_n) définie pour $n \geq 1$ par $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ est convergente et déterminer sa limite l.

4. Montrer que $x_n - l \sim \frac{1}{2n}$ (on pourra admettre dans cette question seulement que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$).

Correction :

$\boxed{\mathbf{1}}$ **1.** La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ (produit de fonctions dérivables) et :

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = 2e^x (x + 1).$$

On a donc : $\forall x \in [0, 1], f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$. f étant continue c'est donc une bijection de $[0, 1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, 2e]$.

La bijection réciproque f^{-1} de f est une bijection de $[0, 2e]$ dans $[0, 1]$, continue, strictement croissante.

2. L'équation $xe^x = 1$ est équivalente à $f(x) = 2$. Comme $2 \in [0, 2e]$, cette équation a une unique solution α dans $[0, 1]$ (l'antécédent de 2 par f).

Comme $f(0)$ et $f(1)$ sont différents de 2 on a $\alpha \in]0, 1[$.

3. Récurrence sur n. Soit la propriété $P(n)$: "$0 < u_n < 1$".

Elle est vraie pour $n = 0$ d'après 2/.

Supposons P_n vraie pour un certain entier n : $0 < u_n < 1$. La fonction f^{-1} étant une application strictement croissante de $[0, 2e]$ dans $[0, 1]$ on a : $f^{-1}(x) \in]0, 1[$ pour $x \in]0, 2e[$ donc $f^{-1}(u_n) \in]0, 1[$ soit $0 < u_{n+1} < 1$ et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

4. On a : $\forall x \in [0, 1], f(x) - x = x(2e^x - 1)$. Pour $x \geq 0$ on a $e^x \geq 1$ donc $2e^x - 1 > 0$ d'où $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

On a $f(x) - x = 0$ ssi $x(2e^x - 1) = 0$. Comme $2e^x - 1 \neq 0$ sur $[0, 1]$ c'est équivalent à $x = 0$.

En remplaçant x par u_n dans l'inégalité $f(x) \geq x$ (possible car $u_n \in [0, 1]$) on obtient $f(u_n) \geq u_n$, et en prenant l'image par f^{-1} (croissante) il vient $u_n \geq f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$. La suite (u_n) est décroissante.

5. Comme elle décroissante et minorée (par 0) elle est donc convergente.

Sa limite l vérifie $f^{-1}(l) = l$ (car f^{-1} continue en l) soit $f(l) = l$ en composant par f, donc $l = 0$ d'après la question précédente.

6. Par définition de u_n on a pour tout entier naturel n, $f(u_{n+1}) = u_n$ soit $2u_{n+1}e^{u_{n+1}} = u_n$, ou $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}}$.

Soit $P_n : u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$. P_0 est vraie car $u_0 = \alpha$ et $\alpha e^{\alpha} = 1$ soit $\alpha = e^{-\alpha}$.

Supposons P_n vraie pour un certain entier n on a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$, soit $u_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{e^{-S_n}}{2^n}e^{-u_{n+1}}$ (hypothèse de récurrence) ou : $u_{n+1} = \frac{e^{-S_n - u_{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}}$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

7. Comme pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq 0$ on a $e^{-u_{n+1}} \leq 1$ donc $\frac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}u_n$, soit $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

Par une récurrence évidente (ou par une "cascade") on en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

En sommant les inégalités $u_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ on obtient : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k}\right)$, soit $S_n \leq \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $1/2$), donc $S_n \leq 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 2$. La suite (S_n) est donc majorée. De plus elle est croissante $(S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0)$ donc la suite (S_n) est convergente.

Pour tout entier naturel n on a $\alpha = S_0 \leq S_n \leq 2$, et en passant à la limite $(n \longrightarrow +\infty)$ il vient $\boxed{\alpha \leq L \leq 2}$.

8. On a $\boxed{u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n} \sim \frac{e^{-L}}{2^n}}$ (car e^{-S_n} converge vers e^{-L}).

$\boxed{2}$ **1.** Soit la fonction φ_k définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \arctan x - x + k\pi$. φ_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_k'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc φ_k est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. De plus $\varphi_k(k\pi) = \arctan(k\pi) > 0$ et $\varphi_k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \frac{\pi}{2} < 0$ (car pour tout réel x, $\arctan x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). D'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi_k(x) = 0$ a une unique solution x_k sur l'intervalle $\left]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $x_k > k\pi$ et $k\pi \longrightarrow +\infty$ donc $\lim x_k = +\infty$ (théorème de comparaison).

On a l'encadrement $k\pi < x_k < \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit, en divisant par $k\pi$, $1 << 1 + \frac{1}{2k}$. D'après le théorème de l'étau on a $\frac{x_k}{k\pi} \longrightarrow 1$ soit $\boxed{(x_k) \sim k\pi}$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\arctan x_k = x_k - k\pi$. Comme $x_k \longrightarrow +\infty$, on a $\arctan x_k \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} (x_k - k\pi) = \frac{\pi}{2}$.

3. a. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $k\pi < x_k < \frac{\pi}{2} + k\pi$, donc $\arctan(k\pi) < \arctan(x_k) < \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (la fonction arctan étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Comme $\arctan x_k = x_k - k\pi$ on obtient $\arctan(k\pi) < x_k - k\pi < \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

b. Posont $\varphi(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = C$. En faisant tendre x vers $+\infty$ il vient $C = \frac{\pi}{2}$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$). On a donc $\boxed{\forall x > 0, \quad \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$.

c. D'après la question 3/ a/ on a : $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) < \frac{\pi}{2} - (x_k - k\pi) < \frac{\pi}{2} - \arctan(k\pi)$, et d'après 3/ b il vient : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{1}{(k+1/2)\pi}\right) \leq \tau_k \leq \arctan\left(\frac{1}{k\pi}\right)}$.

4. En divisant les 3 membres de l'encadrement précédent par $\arctan(1/k\pi)$ on obtient $\frac{\arctan(1/(k+1/2)\pi)}{\arctan(1/k\pi)} \leq \frac{\tau_k}{\arctan(1/k\pi)} \leq 1$. Quand k tend vers l'infini le membre de gauche est équivalent à $\frac{1/(k+1/2)\pi}{1/k\pi}$ (car $\arctan x \sim x$ en 0), soit à $\frac{k}{k+1/2}$, donc il tend vers 1. D'après le théorème de l'étau on a donc $\lim \frac{\tau_k}{\arctan(1/k\pi)} = 1$, soit $\tau_k \sim \arctan(1/k\pi)$. Or $\arctan(1/k\pi) \sim 1/k\pi$, donc $\boxed{\tau_k \sim 1/k\pi}$.

Il existe donc une suite (ε_k) convergeant vers 0 telle que $\tau_k = 1/k\pi\,(1 + \varepsilon_k)$, soit $\tau_k = \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)$, ou encore : $\frac{\pi}{2} - (x_k - k\pi) = \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)$, soit $\boxed{x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)}$.

5. Pour tout réel $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{1}{1+(x+k\pi)^2} < \frac{1}{1+k^2\pi^2}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 < f'(x) \leq \delta_k$, avec $\delta_k = \frac{1}{1+k^2\pi^2} \in [0, 1[$.

6. Ecrivons : $\theta_k - u_{n+1} = f(\theta_k) - f(u_n)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur l'intervalle $[u_n, \theta_k]$, il existe $c_k \in]u_n, \theta_k[$ tel que $f(\theta_k) - f(u_n) = f'(c_k)(\theta_k - u_n)$.

Comme $0 \leq f'(c_k) \leq \delta_k$ on en déduit que $|f(\theta_k) - f(u_n)| \leq \delta_k |\theta_k - u_n|$.

Comme $f(\theta_k) = \theta_k$ on a en définitive : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |\theta_k - u_{n+1}| \leq \delta_k |\theta_k - u_n|}$.

Classiquement (par récurrence ou par une "cascade") on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\theta_k - u_n| \leq \delta_k^n |\theta_k - u_0|.$$

Comme $\delta_k \in [0, 1[$ on a $\delta_k^n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, d'après le théorème de l'étau, on a $|\theta_k - u_n| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, soit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \theta_k}$.

3 **1.** Pour tout réel positif ou nul on a $|f(x) - x| = \left|\frac{x - x(1+x^2)}{1+x^2}\right| = \frac{x^3}{1+x^2}$. Comme $1 + x^2 \geq 1$ on a $\frac{x^3}{1+x^2} \leq x^3$.

On a donc : $\forall x \geq 0, |f(x) - x| \leq x^3$. Ce qui s'écrit aussi $\boxed{\forall x \geq 0, x - x^3 \leq f(x) \leq x + x^3}$.

2. Pour $1 \leq k \leq n$ on a $1 \leq k^3 \leq n^3$ et en sommant de $k = 1$ à n on obtient $n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 \leq n^4$, d'où $0 \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}{n^6} \leq \frac{1}{n^2}$. D'après le théorème de l'étau on a $\boxed{\lim \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^3}{n^6} \to 0}$.

3. D'après 1. on a pour $1 \leq k \leq n$, $\frac{k}{n^2} - \left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} + \left(\frac{k}{n^2}\right)^3$. En sommant ces inégalités de $k = 1$ à n il vient :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2}\right)^3$. Comme $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ cet encadrement s'écrit : $\frac{n+1}{2n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^6} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n} + \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^6}$, soit $\frac{n+1}{2n} - y_n \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n} + y_n$.

D'après 2. $(y_n) \longrightarrow 0$ et et $\frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème de l'étau on a : $\boxed{\lim u_n = \frac{1}{2}}$.

4. D'après l'encadrement précédent on a pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{2n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^6} \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2n} + \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^6}$ et en divisant par $\frac{1}{2n}$ il vient : $1 - 2\frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^5} \leq 2n\left(u_n - \frac{1}{2}\right) \leq 1 + 2\frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^5}$.

Or $\frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^5} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^5} \to 0$ (rapport des termes de plus hauts degrés) donc, d'après le théorème de l'étau, $2n\left(u_n - \frac{1}{2}\right) \to 1$ soit : $\boxed{u_n - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2n}}$.