

SI1 Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx$.

1. Calculer u_1 et I_1 .
2. Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.
3. Quelle est le sens de variation de (u_n) ?
4. Ecrire une relation de récurrence très simple entre u_n, u_{n+2} et I_n .
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)}.$$

6. En intégrant I_n par parties montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{u_{n+2}}{n+1}.$$

En déduire une relation entre u_n et u_{n+2} .

7. Déduire de la question précédente que, pour tout entier naturel n on a : $(2n+2)u_{n+2} \leq \sqrt{2}$.

8. Trouver un équivalent simple de u_n quand n tend vers l'infini.

Correction : 1. On a $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1$ (forme $u'u^{-1/2}$), soit $u_1 = \sqrt{2} - 1$.

De même $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} [(1+x^2)^{3/2}]_0^1$ (forme $u'u^{1/2}$); soit $I_1 = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$.

2. Pour $x \in [0, 1]$ on a : $1+x^2 \geq 1 \implies \sqrt{1+x^2} \geq 1 \implies 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$. En multipliant par x^n et en intégrant entre 0 et 1 on obtient : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx$, soit $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. D'après le théorème de l'étau on a donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

3. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $x^{n+1} \leq x^n$, donc $\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$. En intégrant entre 0 et 1 : $u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n + u_{n+2} = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$ (linéarité de l'intégrale); soit $u_n + u_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx$, ou : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n+2} = I_n$.

5. Pour $x \in [0, 1]$ on a : $1+x^2 \leq 2 \implies \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} \implies \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En multipliant par x^n et en intégrant entre 0 et 1 on obtient : $u_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 x^n dx$, soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)}$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$ on intègre $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx$ par parties en posant $u = \sqrt{1+x^2} \implies u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, v' = x^n, v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, u et v étant de classe C^1 sur $[0, 1]$. On obtient : $I_n = \left[\frac{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}}{(n+1)} \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1+x^2}} dx$, soit $I_n = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{u_{n+2}}{n+1}$.

D'après la relation du 3/ on a donc : $u_n + u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{u_{n+2}}{n+1}$, soit $u_n + \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+1}$, donc, en multipliant par $n+1$: $(n+1)u_n + (n+2)u_{n+2} = \sqrt{2}$.

7. D'après 5/ on a $(n+2)u_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)u_n$ et d'après 4/ : $u_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)}$, donc $-(n+1)u_n \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient : $(n+2)u_{n+2} \leq \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$, soit $(n+2)u_{n+2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. d'après la question précédente on a, pour $n \geq 2$: $nu_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}$. D'après l'inégalité du 4/ on a donc :

$$\forall n \geq 2, \frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}.$$

On en déduit : $\forall n \geq 2, \frac{\sqrt{2n}}{2(n+1)} \leq nu_n \leq \frac{\sqrt{2n}}{2n}$. Comme les suites $\frac{\sqrt{2n}}{2(n+1)}$ et $\frac{\sqrt{2n}}{2n}$ convergent vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$ on a, d'après le théorème de l'étau $\lim nu_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit $\boxed{u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{2n}}$.