Formule de Stirling

Premiere partie : etude d une suite

Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\ dt.$$

1. Calculer I_0, I_1, I_2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Que peut-on en déduire pour cette suite ?

Montrer que pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ dt$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

(Indication : intégrer par parties $\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\ dt$ en écrivant $(\sin\ t)^{n+2} = (\sin\ t)^{n+1} . \sin(t)$).

3. Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a : $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

.

4. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles.

5. En observant que $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, montrer que $\pi = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{p[(2p)!]^2}$.

Deuxieme partie : un encadrement

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^2 concave.

On note $M_2 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f''(t)|$.

Soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine telle que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.

6. Justifier l'existence de M_2.

7. Par des considérations géométriques calculer $\int_a^b g(t)\, dt$ et montrer que :

$$\int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt.$$

Dans la question suivante on veut obtenir l'inégalité :

$$\forall t \in [a,b]\,, f(t) - g(t) \leq \frac{M_2}{2}(t-a)(b-t)\,.$$

Cette inégalité étant clairement vérifiée pour $t = a$ ou $t = b$, il reste à l'étudier pour $t \in]a,b[$.

Pour $t \in]a,b[$ *fixé* on introduit la fonction $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(x-b)$ pour $x \in [a,b]$, où le réel K (dépendant de t) est choisi tel que $h(t) = 0$.

8. a. Calculer K puis $h''(x)$ pour $x \in [a,b]$.

8. b. En observant que h s'annule en trois points distincts deux à deux de $[a,b]$, et en utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $h''(c) = 0$.

8. c. En déduire que $|K| \leq \frac{M_2}{2}$ et conclure.

9. Déduire de 8/ que $\int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b g(t)\, dt \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12}$.

10. En appliquant ce qui précède à la fonction ln sur $[n, n+1]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) montrer que :

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)[\ln(n+1) - \ln(n)] - 1 \leq \frac{1}{12n^2}.$$

TROISIEME PARTIE : FORMULE DE STIRLING

Dans cette partie on utilise les résultats des questions 5/ et 10/ qui pourront, au besoin, être admis.

Pour $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$ on pose :

$$u_n = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right) - \ln(n!) \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}.$$

11. Montrer que (u_n) est croissante puis que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On note C leur limite commune.

12. Montrer que la suite $(2u_n - u_{2n})$ est convergente et calculer sa limite en fonction de C.

13. Ecrire $2u_n - u_{2n}$ sous la forme $\ln(w_n)$ (où (w_n) est une suite réelle) et en déduire que $C = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

14. Conclure que :

$$n! \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \text{ (\textit{Formule de Stirling})}$$

Correction :

Première Partie

1. On a $I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$ et $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\ dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel $t \in [0; \pi/2]$ on a $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$ et en intégrant entre 0 et $\pi/2$ il vient $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

La suite (I_n) étant décroissante et minorée (par 0) elle est donc convergente.

En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$ on a $du = -dt$ et $I_n = \int_{\pi/2}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ dt$.

2. On intègre $I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t dt$ par parties en posant $\left\{\begin{array}{r} u = \sin^{n+1} t; u' = (n+1)\sin^n t.\cos t \\ v' = \sin t; v = -\cos t \end{array}\right.$

(u et v étant de classe C^1 sur $[0; \pi/2]$) ce qui donne $I_{n+2} = \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t\left(1-\sin^2 t\right) dt$ soit $I_{n+2} = (n+1)\left[\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t dt\right]$ d'où $I_{n+2} = (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}$, soit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$.

3. Comme (I_n) est décroissante on a, pour tout entier naturel n, $I_{n+1} \leq I_n$, soit $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, et $\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ (d'après la question précédente). Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1}$.

4. D'après 2/ on a : $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2}$ pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}^*$. En multipliant membres à membres ces égalité pour $k = 1$ à p on obtient : $I_{2p} = \frac{1\times3\times\ldots(2p-1)}{2\times4\times\ldots\times2p} I_0$, donc, en multipliant numérateur et dénominateur par $2 \times 4 \times \ldots (2p)$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2\times4\times\ldots\times2p)^2}\frac{\pi}{2}$, soit $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$.

De même $I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1}$, En multipliant membres à membres ces égalité pour $k = 1$ à p on obtient : $I_{2p+1} = \frac{2\times4\times\ldots(2p)}{1\times3\times\ldots\times(2p+1)} I_1$, soit (en multipliant numérateur et dénominateur par $2 \times 4 \times \ldots (2p)$) $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

5. On a, pour $p \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{2^{4p}(p!)^4}{(2p+1)!(2p)!} \times \frac{2}{\pi}$, donc $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{(2p)I_{2p}} = \frac{2^{4p}(p!)^4}{p[(2p)!]^2} \times \frac{1}{\pi}$.

D'après 3/, $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \longrightarrow 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{p[(2p)!]^2} = \pi}$.

Deuxième Partie

6. La fonction f" étant continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ elle est bornée sur cet intervalle, donc M_2 existe.

7. $\int_a^b g(t)\,dt$ est l'aire d'un trapèze rectangle de bases $g(a)$, $g(b)$ et de hauteur $n+1-n=1$, donc $\int_a^b g(t)\,dt = \frac{g(a)+g(b)}{2}$.

D'autre part, la fonction f étant concave, son graphique est situé au dessus de ses sécantes, donc $g(t) \leq f(t)$ pour tout $t \in [a,b]$, donc $\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt$.

8. a. On a : $h(t) = 0 \iff f(t) - g(t) - K(t-a)(t-b) = 0$, ce qui équivaut à : $\boxed{K = \frac{f(t)-g(t)}{(t-a)(t-b)}}$ (car $t \neq a$ et $t \neq b$).

D'autre part on, pour tout $x \in [a,b]$, $h"(x) = f"(t) - 2K$ (car g est un polynôme de degré ≤ 1 donc $g"(x) = 0$).

8. b. h s'annule en a, b et t. h étant dérivable sur $[a,b]$, d'après le théorème de Rolle appliqué à h sur $[a,t]$ puis sur $[t,b]$, il existe $c_1 \in]a,t[$ et $c_2 \in]t,b[$ tels que $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$.

La fonction h' étant dérivable sur $[a,b]$, d'après le théorème de Rolle appliqué à h' sur $[c_1,c_2]$ $(c_1 \neq c_2)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $h"(c) = 0$.

8. c. Pour $x \in [a,b]$ on a $h"(x) = f"(x) - 2K$ ($g"(x) = 0$ car g est un polynôme de degré au plus 2). La relation $h"(c) = 0$ s'écrit alors : $f"(c) - 2K = 0$, soit $\frac{f"(c)}{2} = K$.

On a donc $|K| \leq \frac{M_2}{2}$. D'autre part $K = \frac{f(t)-g(t)}{(t-a)(t-b)}$ donc $\left|\frac{f(t)-g(t)}{(t-a)(t-b)}\right| \leq \frac{M_2}{2}$, soit $\boxed{\forall t \in [a,b]\,,\ 0 \leq f(t) - g(t)}$ (car $f(t) - g(t) \geq 0$ et $t \in [a,b]$).

9. En encadrant les deux membres de l'inégalité précédente entre a et b il vient : $\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt \leq \frac{M_2}{2}\int_a^b (t-a)(b-t)\,dt$.

On calcule cette dernière intégrale par parties en posant $u = t-a$ et $v' = b-t$; $u' = 1, v = -\frac{(b-t)^2}{2}$, soit $\int_a^b (t-a)(b-t)\,dt = \left[-\frac{(t-a)(b-t)^2}{2}\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b (b-t)^2\,dt = \frac{(b-a)^3}{6}$, soit $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt \leq \frac{M_2}{}}$

10. Pour $f(x) = \ln x$, $a = n$ et $b = n+1$, on a $\int_a^b f(t)\,dt = [t\ln t - t]_n^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1$, $\int_a^b g(t)\,dt = \frac{\ln(n+1)+\ln(n)}{2}$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in[n,n+1]} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n^2}$, d'où $0 \leq (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1 - \frac{\ln(n+1)+\ln(n)}{2} \leq \frac{1}{12n^2}$, soit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)[\ln(n+1) - \ln(n)] - 1 \leq \frac{1}{12n^2}}$.

Troisième Partie

11. Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ on a : $u_{n+1} - u_n = \ln\left((n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-n-1}\right) - \ln[(n+1)!] - \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right) + \ln(n!)$, soit $u_{n+1} - u_n = \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - \ln(n+1) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - 1$, soit $u_{n+1} - u_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)[\ln(n+1) - \ln(n)] - 1 \geq 0$ (d'après 10/), donc la suite (u_n) est croissante.

D'autre part : $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n-1)} \leq \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} \leq 0$ donc la suite (v_n) est décroissante.

Enfin $u_n - v_n = -\frac{1}{12(n-1)} \longrightarrow 0$.

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

12. La suite (u_{2n}) est une suite extraite de (u_n) donc $\lim u_{2n} = \lim u_n = C$.

On a donc $\lim(2u_n - u_{2n}) = 2C - C = C$.

13. Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ on a $2u_n - u_{2n} = 2\ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right) - 2\ln(n!) - \ln\left((2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\right) + \ln((2n)!)$, soit $2u_n - u_{2n} = \ln\left(\frac{n^{1/2}(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n[(2n)!]^2}{(n!)^4 2^{4n+1}}\right)$, qui tend vers $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2\pi}\right)$ d'après 5/, donc $\boxed{C = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)}$.

14. On a $u_n \longrightarrow -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$, soit $\ln\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}\right) \longrightarrow \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$. En passant à l'exponentielle : $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, soit $\frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \longrightarrow 1$ ce qui donne : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}}$.